畢氏定理

文本展示：商高的證法：

周髀算經卷上

趙　君卿　注

甄　鸞　重述

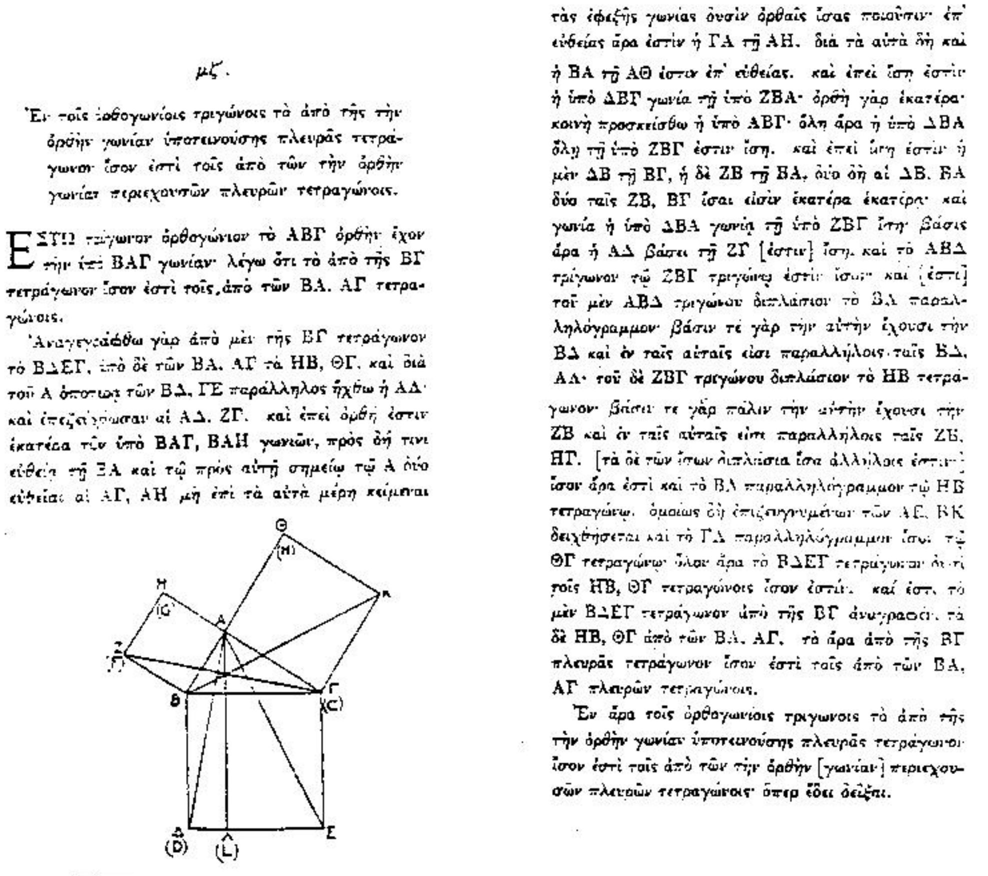
唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉勅注釋

昔者周公問於商高曰竊聞乎大夫善數也周公姓姬名旦武王之弟商高周時賢大夫善筭者也周公位居冢宰德則至聖尚卑己以自牧下學而上達況其凡乎請問古者包犧立周天曆度包犧三皇之一始畫八卦以商高善數能通乎微妙達乎無方無大不綜無幽不顯聞包犧立周天曆度建章蔀之法易曰古者包犧氏之王天下也仰則觀象於天俯則觀法於地此之謂也夫天不可階而升地不可得尺寸而度邈乎懸廣無階可升蕩乎遐遠無度可量請問數安從出心昧其機請問其目商高曰數之法出於圓方圓徑一而周三方徑一而匝四伸圓之周而為句展方之匝而為股共結一角邪適弦五此圓方邪徑相通之率故曰數之法出於圓方圓方者天地之形陰陽之數然則周公之所問天地也是以商高陳圓方之形以見其象因奇耦之數以制其法所謂言約旨遠微妙幽通矣圓出於方方出於矩圓規之數理之以方方周匝也方正之物出之以矩矩廣長也矩出於九九八十一推圓方之率通廣長之數當須乘除以計之九九者乘除之原也故折矩故者申事之辭也將為句股之率故曰折矩也以為句廣三應圓之周橫者謂之廣句亦廣廣短也股脩

四應方之匝從者謂之股脩股亦脩脩長也徑隅五自然相應之率徑直隅角也亦謂之弦既方之外半其一矩句股之法先知二數然後推一見句股然後求弦先各自乘成其實實成勢化爾乃變通故曰既方其外或并句股之實以求弦實之中乃求句股之分并實不正等更相取與互有所得故曰半其一矩其術句股各自乘三三如九四四一十六并為弦自乘之實二十五減句於弦為股之實一十六減股於弦為句之實九環而共盤得成三四五盤讀如盤桓之盤言取而并減之積環屈而共盤之謂開方除之其一面故曰得成三四五也兩矩共長二十有五是謂積矩兩矩者句股各自乘之實共長者并實之數將以施於萬事而此先陳其率也故禹之所以治天下者此數之所生也禹治洪水決流

於句句出於矩矩謂之表表不移亦為句為句將正故曰句出於矩焉夫矩之於數其裁制萬物唯所為耳言包含幾微轉通旋還也周公曰善哉善哉言明曉之意所謂問一事而萬事達昔者榮方問於陳子榮方陳子是周公之後人非周髀之本文然此二人共相解釋後之學者謂為章句因從其類列於事下又欲尊而遠之故云昔者時世官號未之前聞曰今者竊聞夫子之道榮方問陳子能述商高之旨明周公之道知日之高大日去地與圓徑之術光之所照日旁照之所及也一日所行日行天之度也遠近之數冬至夏至去人之遠近也人所望見人目之所極也四極之窮日光之所遠也列星之宿二十八宿之度

文本展示：歐幾里得的證法



μζ΄.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

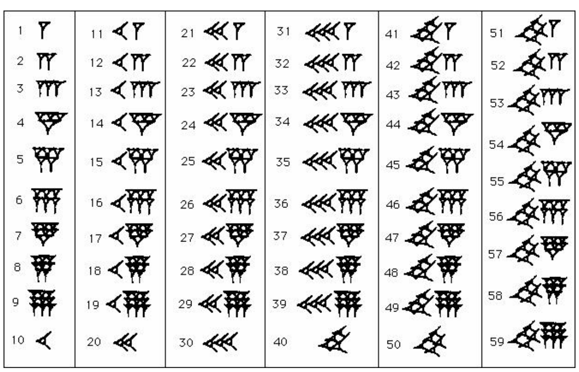
ΕΣΤΩ τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆς ΒΓ τετράγωνον τὸ ΒΔΕΓ, ἀπὸ δὲ τῶν ΒΑ, ΑΓ τὰ ΗΒ, ΘΓ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΒΔ, ΓΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΛ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΖΓ. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΒΑΗ γωνιῶν, πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΒΑ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΑΗ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΑΗ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΑ τῇ ΑΘ ἐστιν ἐπ' εὐθείας. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΑ· ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΑ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΒ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΖΒ τῇ ΒΑ, δύο δὴ αἱ ΔΒ, ΒΑ δύο ταῖς ΖΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΑ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΖΓ [ἐστιν] ἴση, καὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΖΒΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον· καὶ [ἐστι] τοῦ μὲν ΑΒΔ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΒΛ παραλληλόγραμμον· βάσιν τε γὰρ τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΒΔ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς ΒΔ, ΑΛ· τοῦ δὲ ΖΒΓ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΗΒ τετράγωνον· βάσιν τε γὰρ πάλιν τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΖΒ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς ΖΒ, ΗΓ. [τὰ δὲ τῶν ἴσων διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν·] ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΒΛ παραλληλόγραμμον τῷ ΗΒ τετραγώνῳ. ὁμοίως δὴ ἐπιζευγνυμένων τῶν ΑΕ, ΒΚ δειχθήσεται καὶ τὸ ΓΛ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ΘΓ τετραγώνῳ· ὅλον ἄρα τὸ ΒΔΕΓ τετράγωνον δυσὶ τοῖς ΗΒ, ΘΓ τετραγώνοις ἴσον ἐστίν. καί ἐστι τὸ μὲν ΒΔΕΓ τετράγωνον ἀπὸ τῆς ΒΓ ἀναγραφέν, τὰ δὲ ΗΒ, ΘΓ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις.

Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν [γωνίαν] περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

現代希臘文版《幾何原本》I 47（勾股定理）全文

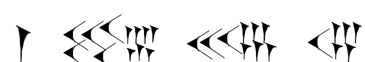
巴比倫人對此定理的研究



泥板上 1~59 的記號

現存放在美國 Columbia 大學圖書館

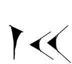
普林頓 322 號泥板。



1 57 36 15

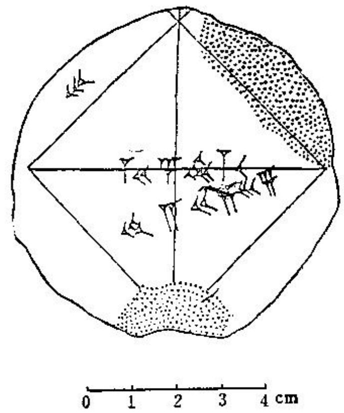
表示 $1 \cdot 60^3 + 57 \cdot 60^2 + 36 \cdot 60 + 15 = 423375$

但由於沒有零的符號來表示缺位，因此類似底下的記號就要看上下文的文意才能辨別。

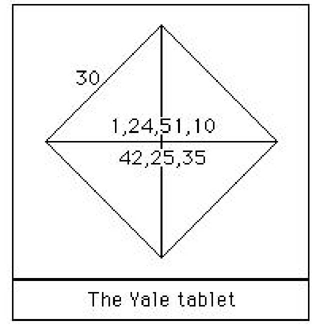


$$= \begin{cases} = 1 \times 60 + 20 = 80 \\ \text{或} \\ = 1 \times 60^2 + 0 \times 60 + 20 = 3620 \end{cases}$$

YBC 7289 實物照片

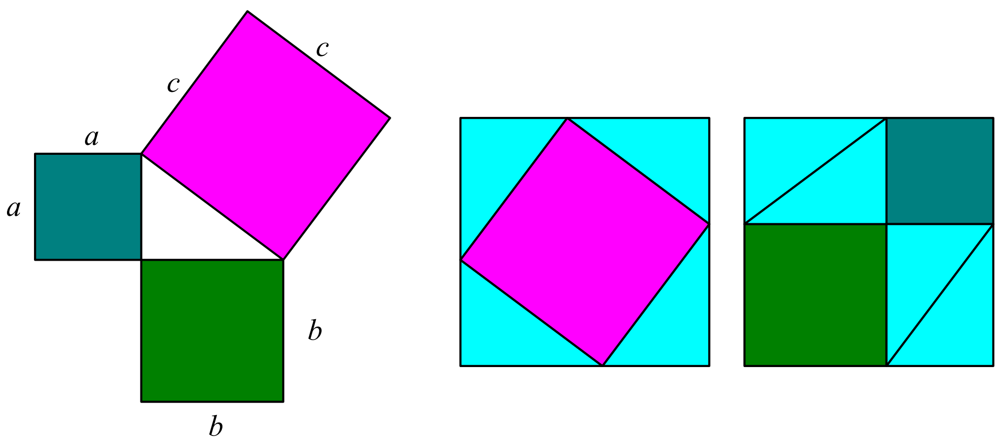


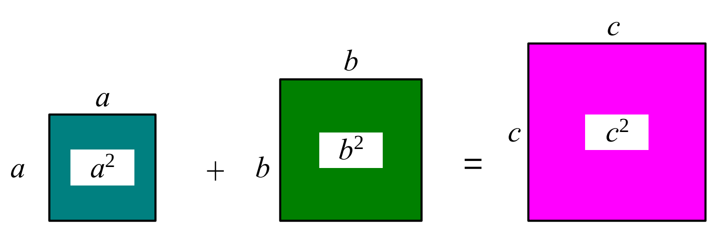
YBC 7289 摹寫圖



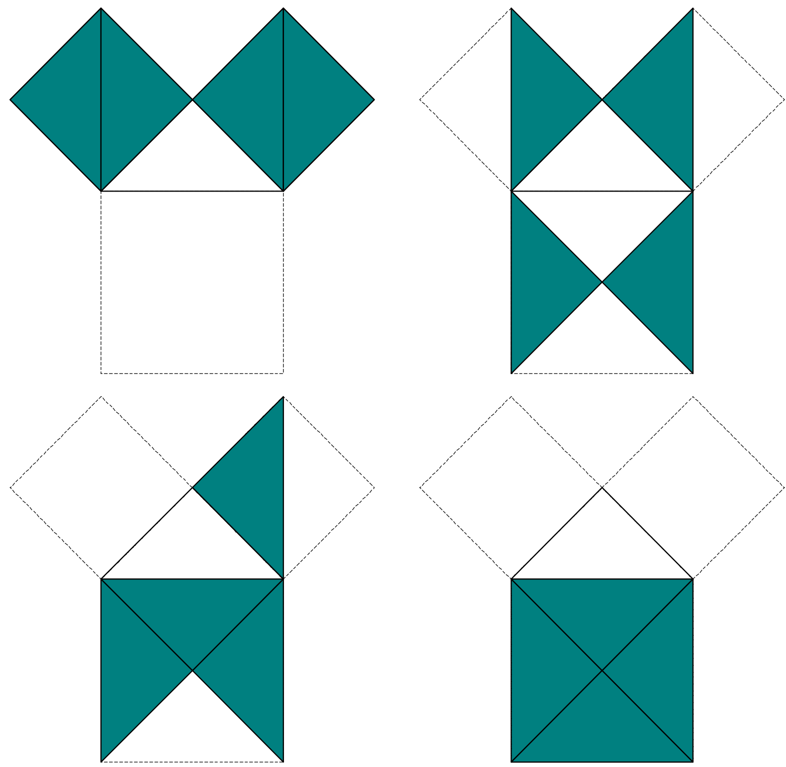
利用特殊比例感受畢氏定理

(一)

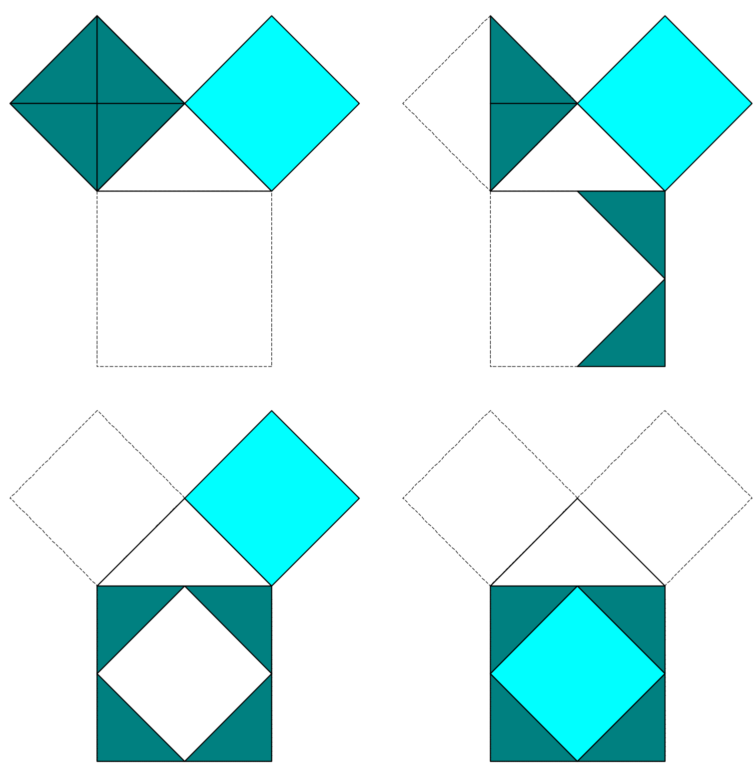




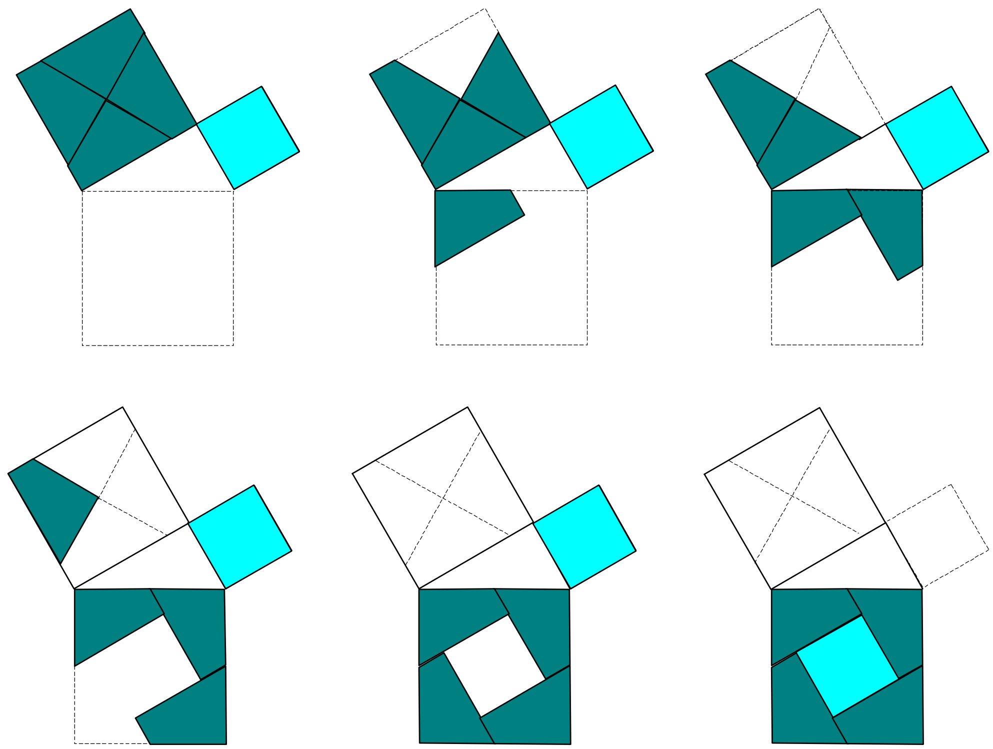
(二)



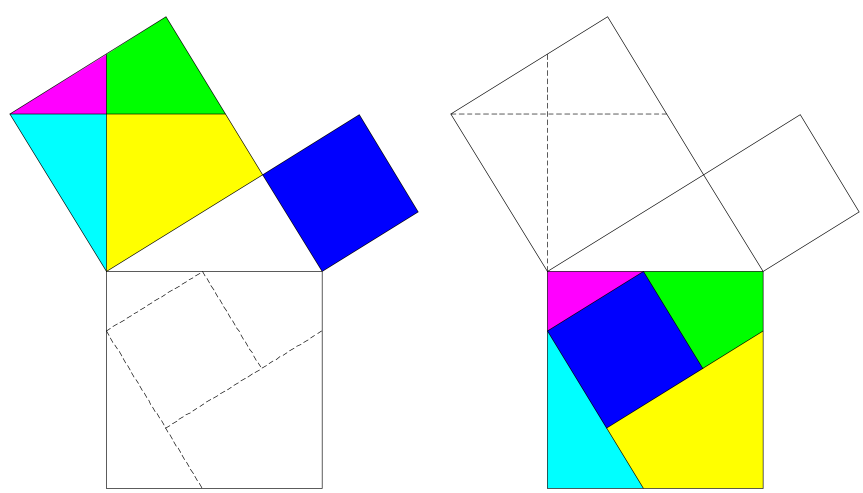
(三)



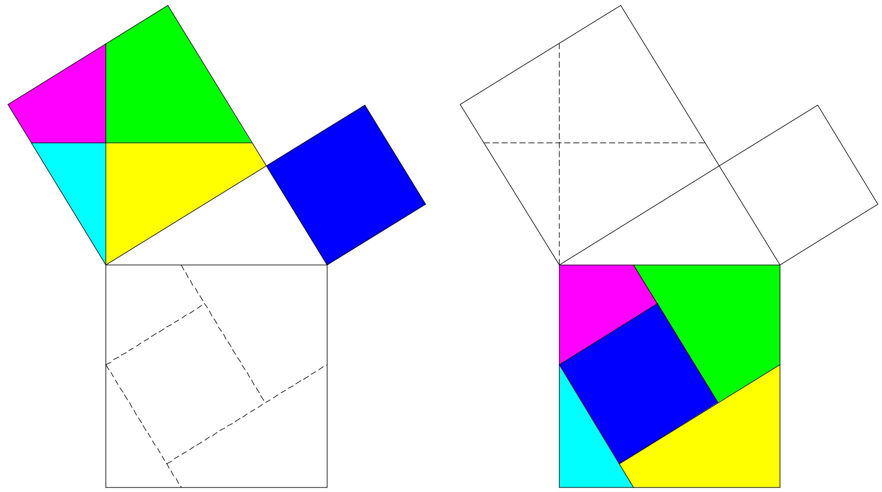
(四)



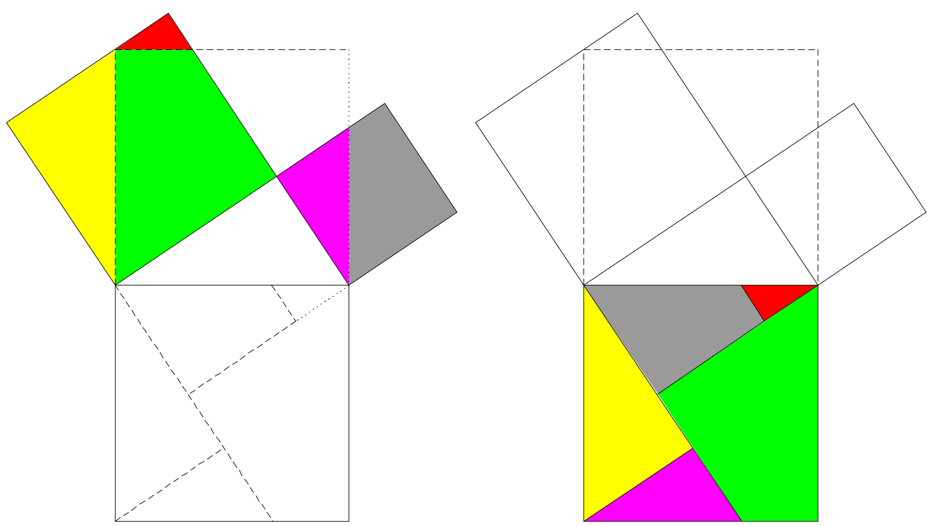
(五)

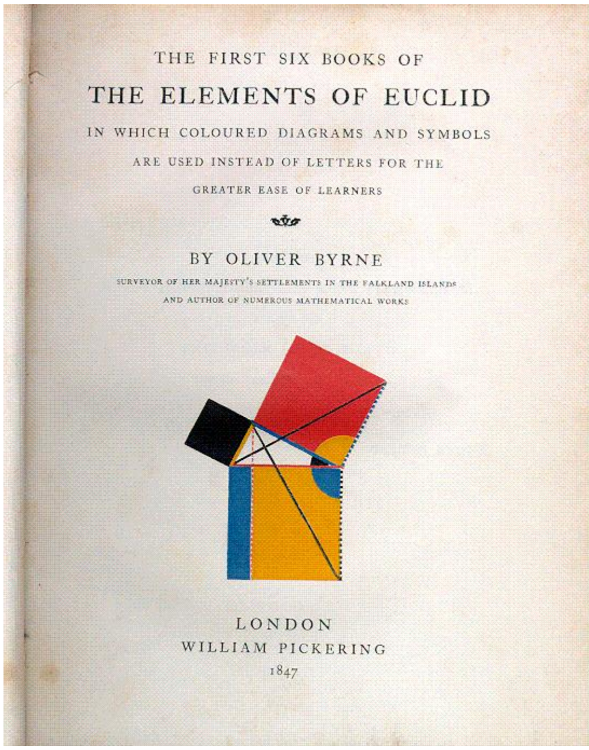


(六)



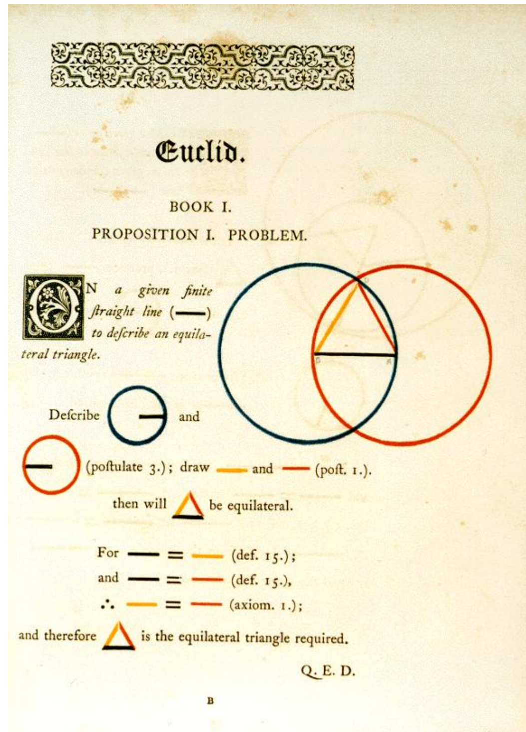
(七)




THE FIRST SIX BOOKS OF
THE ELEMENTS OF EUCLID
IN WHICH COLOURED DIAGRAMS AND SYMBOLS
ARE USED INSTEAD OF LETTERS FOR THE
GREATER EASE OF LEARNERS

BY OLIVER BYRNE
SURVEYOR OF HER MAJESTY'S SETTLEMENTS IN THE FALKLAND ISLANDS
AND AUTHOR OF NUMEROUS MATHEMATICAL WORKS

LONDON
WILLIAM PICKERING
1847


Euclid.

BOOK I.
PROPOSITION I. PROBLEM.

ON a given finite ſtraight line ( ) to deſcribe an equilateral triangle.

Deſcribe and (poſtulate 3.); draw and (poſt. 1.).

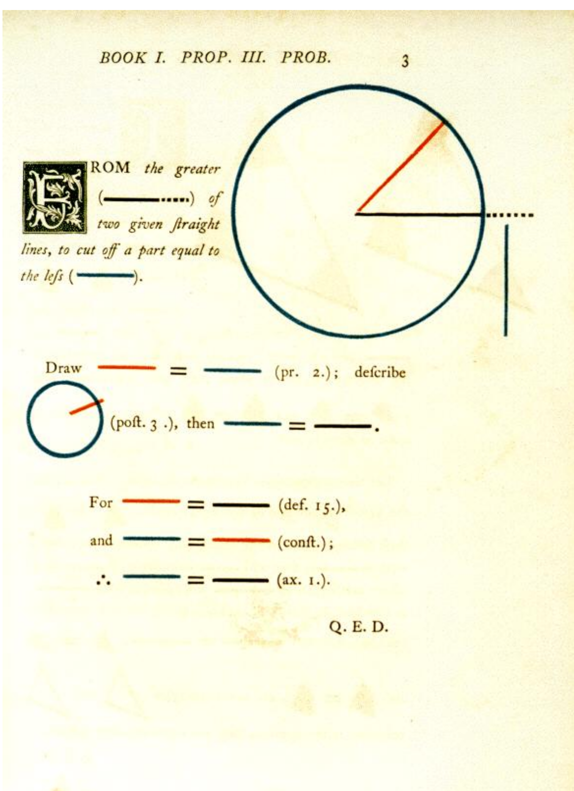
then will be equilateral.

For = (def. 15.);
and = (def. 15.),
∴ = (axiom. 1.);

and therefore is the equilateral triangle required.

Q. E. D.

B

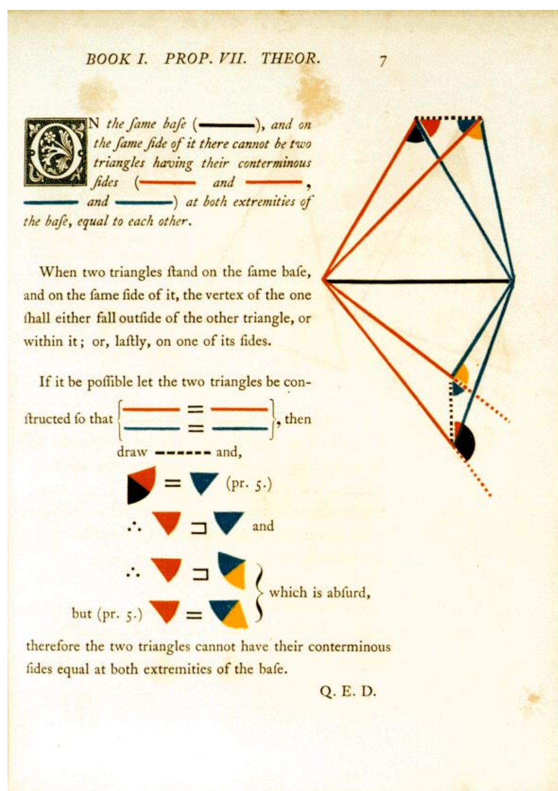

BOOK I. PROP. III. PROB. 3

FROM the greater ( ) of two given ſtraight lines, to cut off a part equal to the leſs ( ).

Draw = (pr. 2.); deſcribe (poſt. 3 .), then = .

For = (def. 15.),
and = (conſt.);
∴ = (ax. 1.).

Q. E. D.


BOOK I. PROP. VII. THEOR. 7

ON the ſame baſe ( ), and on the ſame ſide of it there cannot be two triangles having their conterminous ſides (and , and) at both extremities of the baſe, equal to each other.

When two triangles ſtand on the ſame baſe, and on the ſame ſide of it, the vertex of the one ſhall either fall outſide of the other triangle, or within it; or, laſtly, on one of its ſides.

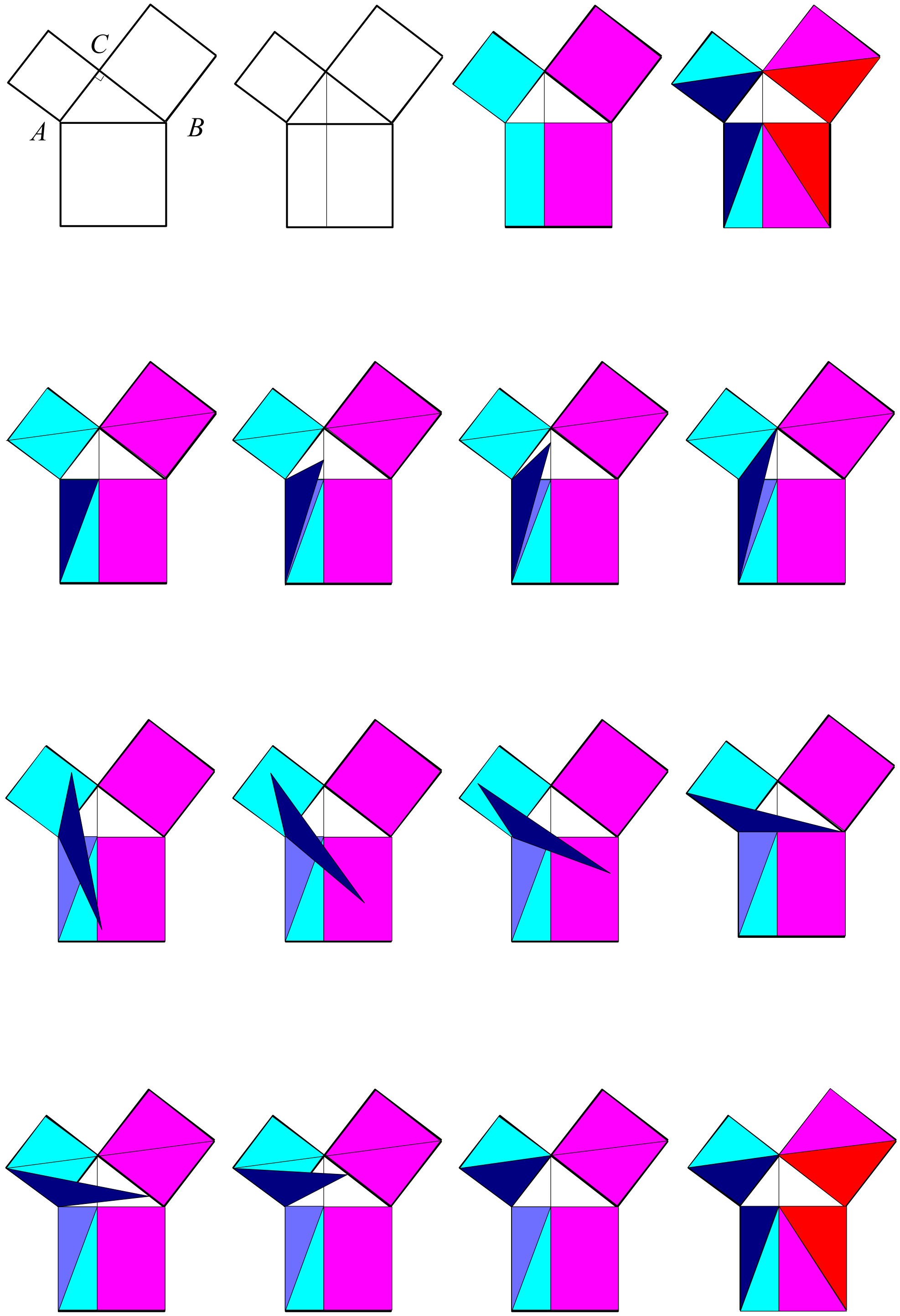
If it be poſſible let the two triangles be conſtructed ſo that { = , = }, then draw and,

= (pr. 5.)
∴ ⊐ and
∴ ⊐ } which is abſurd,
but (pr. 5.) = }

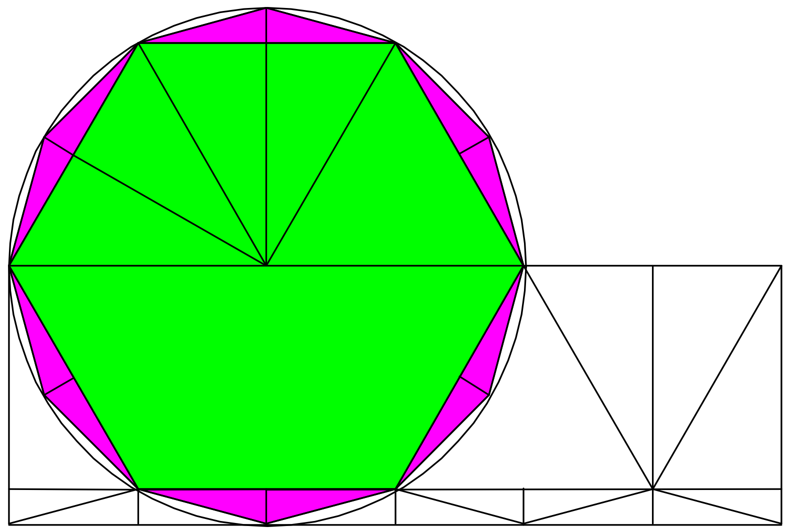
therefore the two triangles cannot have their conterminous ſides equal at both extremities of the baſe.

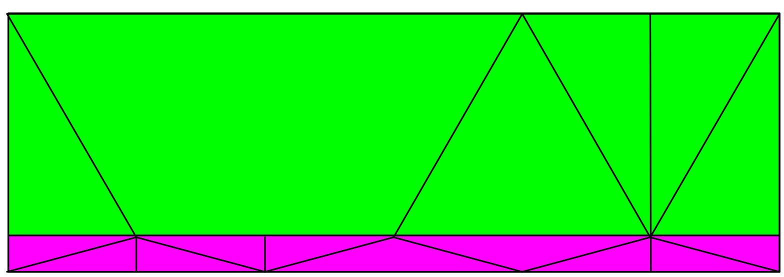
Q. E. D.

幾何原本中的證明：

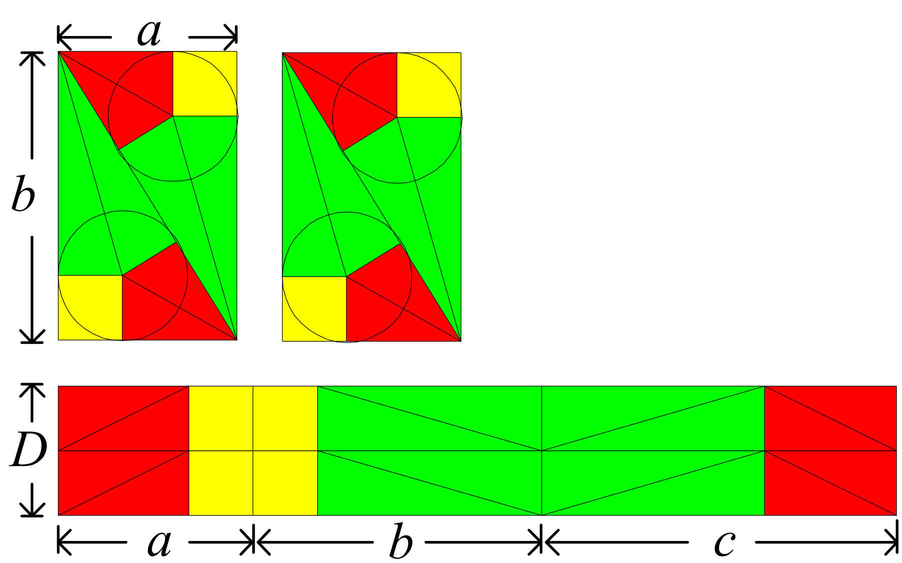


周三徑一：



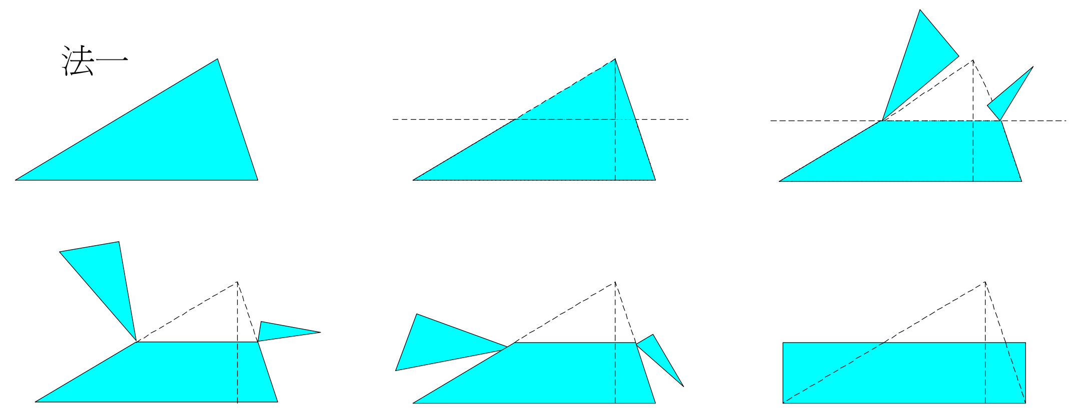


內切圓直徑 $\boldsymbol{D}=\dfrac{\boldsymbol{2ab}}{\boldsymbol{a+b+c}}$

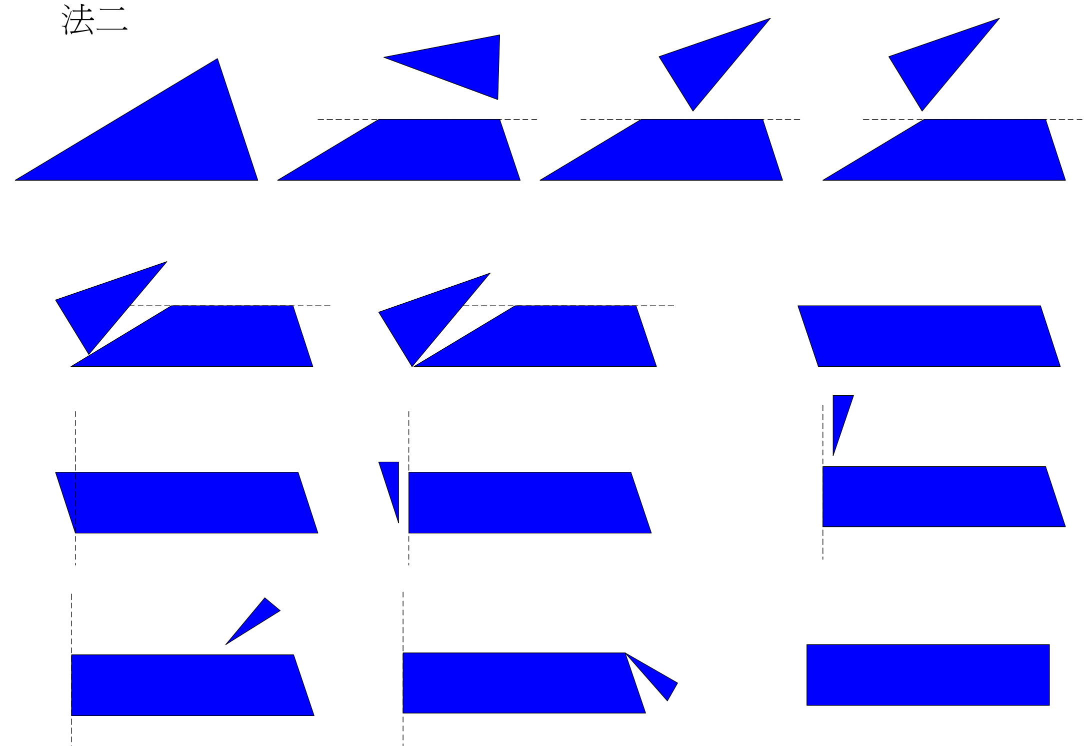


出入相補現代版

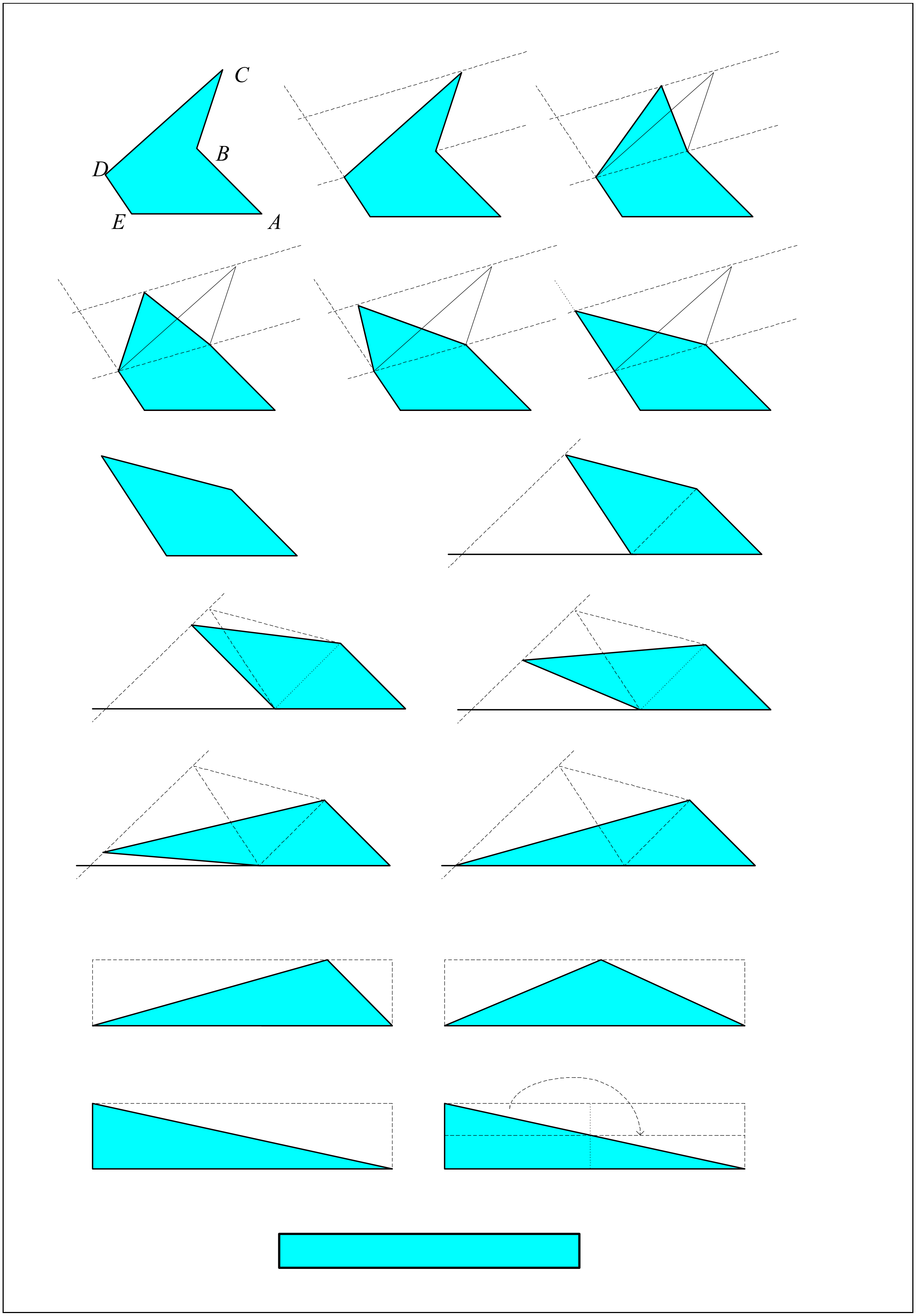
法一



法二

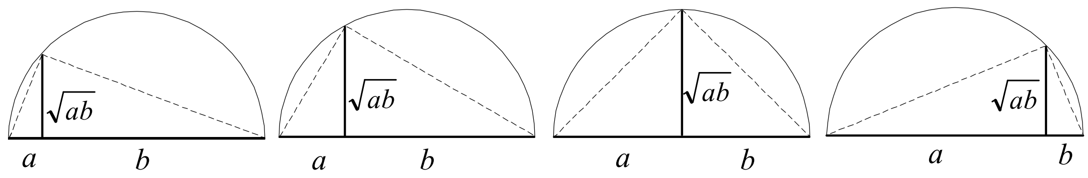


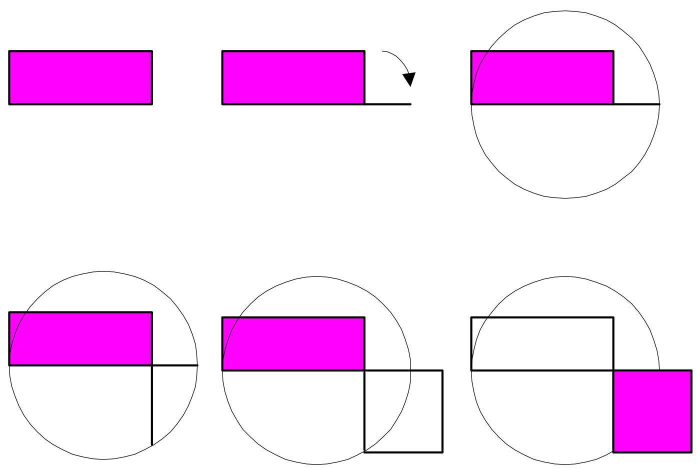
將凹五邊形化成長方形



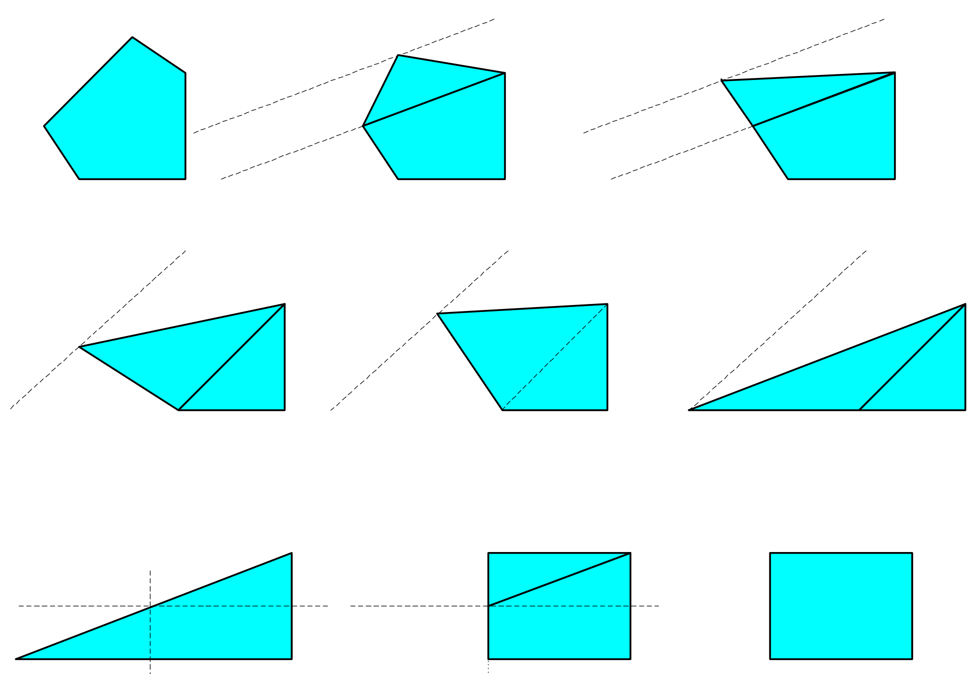
將長方形化成正方形

所利用的幾何性質：





將任意四邊形化成長方形

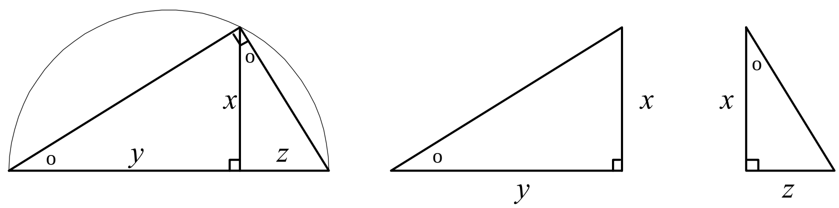


將任意多邊形化成長方形?

拋物線

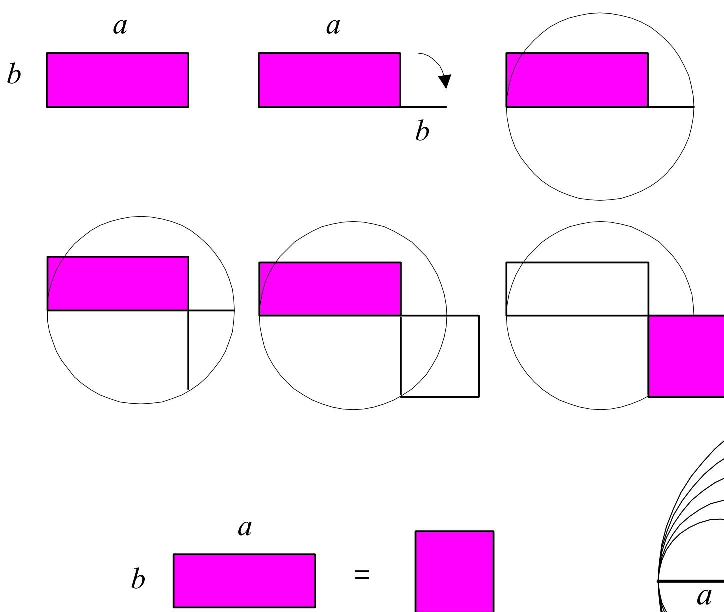
尺規作圖的美學上的魅力，即在於僅用圓與直線便可畫出許多美麗圖形，並啓發人類的思維。以柏拉圖爲代表的希臘學者，認爲引入複雜的工具來解決古希臘的作圖問題，雖對手工繪製是可取，但對於一個思想家來說則是不足稱道，柏拉圖更認爲，利用複雜的工具，那麼「幾何學的優點」就會盪然無存，因爲這樣的話，我們又重新使幾何學退到了感性世界，而不是用思想中永恆的、超越物質的思維想像力去提高、充實它。

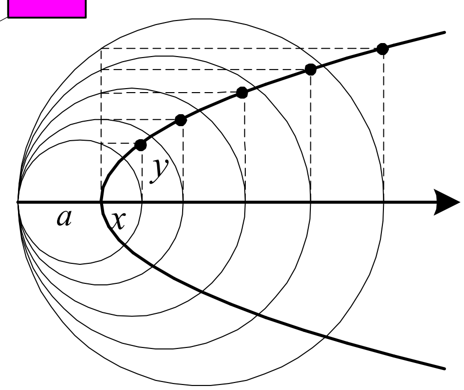
下圖 x、y、z 的關係爲 $x^2 = yz$



圖(一)

而圖二，即是利用此原理，作一正方形，使其面積等於一長寬分別爲 a，b 的矩形面積的簡易圖解：





圖三

問題與討論：

1.請證明圖一中，爲何 $x^2 = yz$。
2.說明圖二中的作圖步驟。
　右圖一，五邊形的面積相等。
3.在探討許多尺規作圖的過程中，數學家常有其他的發現。例如約西元前 4 世紀的 Menaechmus 就對圓錐曲線十分感興趣，他認爲拋物線雖然無法以尺規作出，不過利用直線與圓，藉由比例，可以作出拋物線上的某些點，至少可以大致描繪出它的圖形，如圖(三)，請你證明他的方法是正確的。

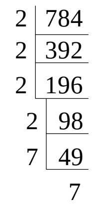
開 方 術

將一個正數求出它的平方根的過程稱為「開平方」或簡稱為「開方」。在人類的歷史文化中，不管西方或東方，對於如何找型如$\sqrt{144}$ = 12 的正確值或是$\sqrt{200}$ ≒ 14.14 的近似值，有著許多不同的方法。以我們學過的「質因數分解」來說，其實不難看出開方數為何?

例如：求$\sqrt{784}$ = ?

由右圖一的分解，可以得知 $784 = 2^4 \times 7^2 = (2^2 \times 7)(2^2 \times 7)$

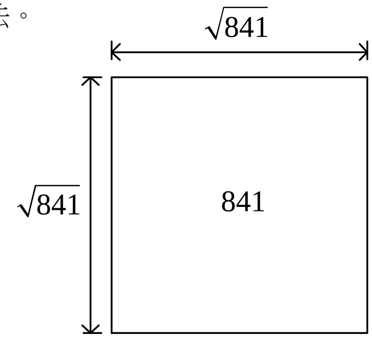
所以，$\sqrt{784} = 2^2 \times 7 = 28$



圖一

由於「開方的概念來自於平方，而平方的幾何思考在於正方形的面積」，因此早期的數學家利用「面積的分割」來處理開方問題，應是最直接、最原始的想法。

以 $x^2＝841$ 為例：即是找一個面積為 841 的正方形，而此正方形的邊長就是$\sqrt{841}$如右圖二。



圖二

首先估計十位數：

因為 $20^2＝400＜841$，$30^2＝900＞841$

所以十位數字為 2。

再由右圖二看出黃色部分的面積為 841ï400 = 441

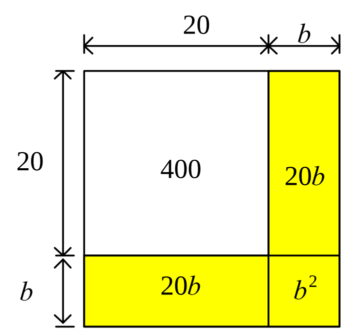
接著要找個位數 b，必須讓

$$40b＋b^2＝441$$

觀察 $(40＋b)\cdot b＝441$

441 得知個位數字 b 是 1 或 9，經試驗得到 $b＝9$，

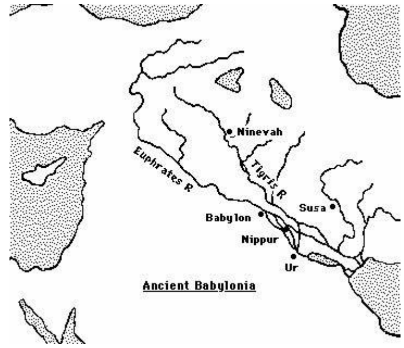
即$(40+9) \times 9 = 441$，所以 841 的正平方根為 29。



圖三

或許現在的你可以動動腦，分別利用「質因數分解」和「面積分割」來求$\sqrt{1849}$ = ? 並比較一下有何差異?

配 方 法

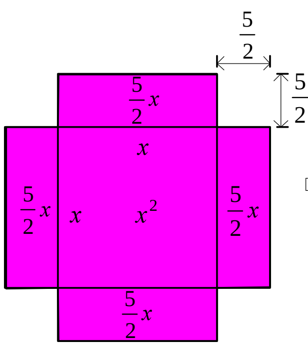


古巴比倫文化發源於現在土耳其境內的河流經過現在的敘利亞和伊拉克，向東南方流入波斯灣。現在對於古巴比倫數學及文化的了解，是來自於泥板上所刻下的文字和符號，這些泥板有些是屬於 2000 B.C.時代的產物，而大部分是西元 600 年前到西元 300 年所遺留下來的。

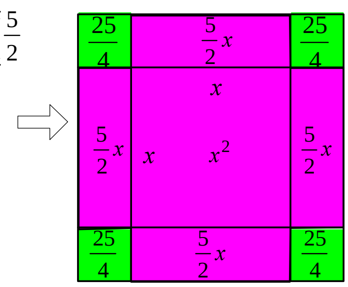
2003 年最受關注的國際事件之一，「美國與伊拉克的戰爭」，便是在這裡開打的，至於誰是真正的獲勝者，由於觀點的不同，解讀的互異、目前無法立刻斷言！不過，此役造成許多古文物遭受破壞卻是不爭的事實。

戰火後，開始重組領導中心的巴格達，在中世紀時，曾是阿拉伯世界的數學活動中心，當時的阿拔斯王朝(750~1258)在此設立了「智慧宮」，聚集了大批學者，將許多數學著作翻譯成阿拉伯文，並提出了許多獨創的見解，其中最卓越的代表是阿爾・花拉子模(alkhowarizmi ,約 780~850)。

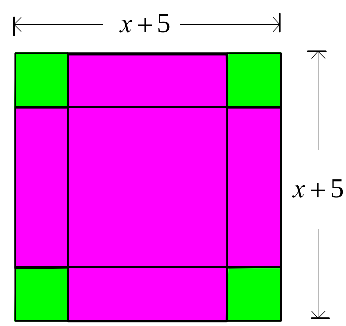
在解型如 $x^2+10x=39$(這是現在的表示方法)的方程式，阿爾・花拉子模給了幾何論證如下：首先把等號左邊的 x^2+10x 看成一塊面積為 x^2 的正方形與四塊面積均 $\frac{5}{2}x$ 為長方形的和，如下圖一。然後在四個缺口，分別補上四個面積分別為 $\frac{25}{4}$ 的正方形，即形成一個面積為 $39+25=64$ 的大正方形如圖二。因此，圖三的的大正方形面積邊長 $x+5=8$，得 $x=3$ 。



圖一



圖二



圖三

將上面寫成算式即為

$$x^2+10x=39$$
$$x^2+10x+25=39+25$$
$$(x+5)^2=64$$
$$x+5=8 \quad (\text{當時並無 ï8 概念})$$
$$x=3$$

出生於波斯北部的阿爾・花拉子模，便是在巴格達任職期間，在他的《代數學》一書，給一元二次方程式這種看法，其中所談到的「移項」、「同類項合併」、「對消」以及「二次方程式無根的」等代數概念沿用至今。後來《代數學》被譯為拉丁文，成為歐洲行用數百年的數學課本後，對 16 世紀義大利數學家發展解三、四次方程有著重大的影響。

巴比倫人的平方根之近似值求法

古巴比倫人是利用黏土書板來刻寫文字，透過現已發掘之泥版(cuneiform)，我們可以知道遠在 **1900~1600B.C.**的巴比倫數學內容脈絡。他們創造了一套六十進位爲主的記數系統，利用各種數表進行計算，其中包括乘法表、倒數表、平方表、立方表é 甚至還有指數表等等。底下是他們在求平方根之近似值所進行的步驟(以現在我們的數學語言和符號表示)：

例 1: 求$\sqrt{17}$ 之近似值。

解: 由$\sqrt{17} \times \sqrt{17}=17$

由 $4 \times \frac{17}{4}=17$ 中可看出因爲$\sqrt{17}$比 4 大一點，所以$\sqrt{17}$比$\frac{17}{4}$ 小一點

所以可以取平均數即: $\sqrt{17}$ å $\frac{1}{2}(4+\frac{17}{4})=\frac{33}{8}$

例 2: 求$\sqrt{2}$ 之近似值。

解: 由$\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$

(1)由 $\mathbf{1}\times \mathbf{2}=2$ ，可找到 **1** 和 **2** 的平均數 $\frac{1+2}{2}=\mathbf{\frac{3}{2}}$ 再求 $2 \div \frac{3}{2}=\mathbf{\frac{4}{3}}$

(2)由 $\mathbf{\frac{3}{2}}\times\mathbf{\frac{4}{3}}=2$，可找到 $\mathbf{\frac{3}{2}}$ 和 $\mathbf{\frac{4}{3}}$ 的平均數$\frac{1}{2}(\frac{3}{2}+\frac{4}{3})=\frac{17}{12}$

所以$\sqrt{2}$ å $\frac{17}{12}$

問題與討論：

1.利用上述方法找出下列各數的一個近似值：

(1) $\sqrt{10}$ (2) $\sqrt{7}$

2.利用上述方法，重覆你的步驟，找出下列各數的三個更逼近的近似值：

(1) $\sqrt{15}$ (2) $\sqrt{27}$

3.下列式子是在巴比倫的泥板上發現的：

$\sqrt{40^2+10^2}=40+\frac{100}{2\cdot 40}$ 請你說明理由。(提示：$\sqrt{40^2+10^2}>40$)

4.對於巴比倫的方法和「牛頓法」求平方根法，你有何看法?

5.你可以仿照巴比倫人的方式找出求立方根近似值的方法嗎? 以$\sqrt[3]{10}$說明之。