

從數學檢測結果 探究教學策略

台北市數學科輔導團

五常國小 方敬慈老師

談些什麼

□ 從臺北市數學檢測結果

探究學生學習困難與教學策略

- 整數
- 分數
- 幾何
- 量與實測



從臺北市數學檢測結果探究學生
整數的學習困難與教學策略

概數的加減估算~ 96年檢測

- 以「55765527和44481107相差多少？(用四捨五入法取概數到萬位再計算)」為例。
- 24. 12%的學生錯誤選答「約1128萬人」：
先將大數進行計算，再用四捨五入法取概數。學生不理解概數的意義
- 13. 10%的學生錯誤選答「約1130萬人」：
學生視萬位數字的大小決定四捨五入。
取概數到萬位，學生不理解，為何要看千位的數字來決定？

概數~ 98年檢測

請從0、2、3、4、5、6、9這七個數字中，選出兩個數填入下面的空格裡，使得組成的五位數用四捨五入法取概數到千位，得到的答案是15000。請把所有可能的五位數寫出來。

請寫出所有可能的五位數：

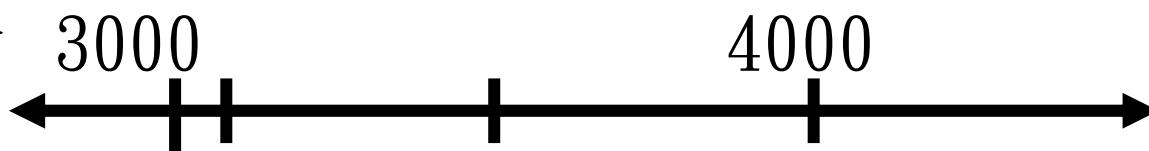
1			8	7
---	--	--	---	---

概數取法的教學策略

□ 從具體情境出發

某國小有學生3124人，大約是幾千人？(用四捨五入法取概數到千位)

□ 和學生討論



- 3124比較接近3000還是比較接近4000？
- 為什麼用四捨五入法取概數到千位時，只看百位數字決定？十位呢？個位呢？

整數四則運算~96年檢測

□ 以「 $14 - 5 \times 2 + 3 = ?$ 」為例

❖ 答錯的學生占 **45.24%**

錯誤類型：

□ 22.25%的學生選擇下列作法：

$$14 - 5 \times 2 + 3 = 14 - \underline{10 + 3} = 14 - 13 = 1 \text{ (先加後減)}$$

□ 15.01%的學生選擇下列作法：

$$\underline{14 - 5} \times 2 + 3 = 9 \times 2 + 3 = 18 + 3 = 21 \text{ (由左而右)}$$

整數四則運算~97年檢測

□ 算算看，並把你的算法和答案寫來。

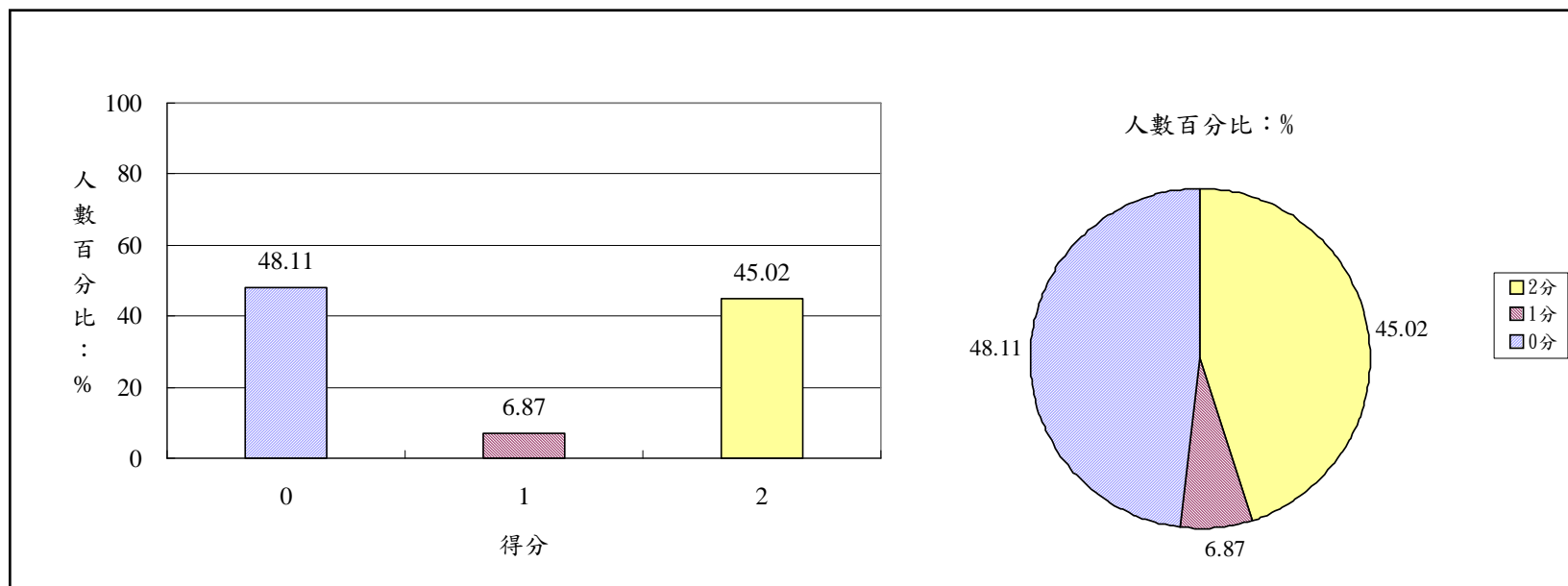
$$16 + 64 \div (24 - 8 \times 2) \times 2$$

❖ 答錯的學生占 **53.47%**

整數四則運算(擬題)~98年檢測

請你設計一個數學題目，這個題目可以用「 $15 + 20 \times 4$ 」算出答案。把你設計的題目寫下來。

評閱結果



四則運算規約的教學順序

□ 四則運算規約的順序應如何？

先乘除後加減

由左而右

有括號的先算

□ 順序：

- 由左而右(只有加減或只有乘除的情況)
- 有括號的先算
- 先乘除後加減

併式記錄教學策略

□ 從兩步驟列式到併式

□ 題目：哥哥有100元，買文具用掉40元，買早餐用掉30元，哥哥還剩下多少元？

□ $40+30=70$...先算花掉的錢(買文具和早餐)



$100 - 70 = 30$ 再算買完剩下的錢

□ $100 - (40+30)$

$= 100 - 70$

$= 30$

逐次減項的教學策略

- 常見錯誤：

$$\begin{aligned} &72 \div 8 \times 3 + 10 \\ &= 9 \times 3 \\ &= 27 + 10 \\ &= 37 \end{aligned}$$

- 讓學生理解等號代表兩邊數量一致

$$\begin{aligned} &72 \div 8 \times 3 + 10 \\ &= 9 \times 3 + 10 \\ &= 27 + 10 \\ &= 37 \end{aligned}$$



從臺北市數學檢測結果探究學生
分數的學習困難與教學策略

認識假分數~96年檢測

□ 題目:一盒巧克力有4顆，請畫圖表示 $\frac{5}{2}$ 盒巧克力。

❖ 答錯的學生占 **37.63%**

分數概念教學策略

□ 教學情境的安排

■ 連續量

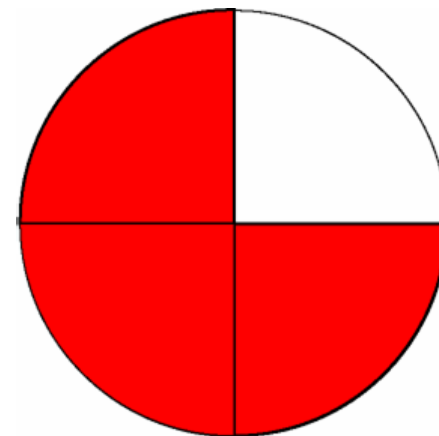
- 一個披薩(可以看到完整的1)
- 一個蛋糕

■ 離散量

- 一盒巧克力有5個，弟弟拿1個，弟弟拿了 $1/5$ 盒巧克力。(單位分數內容物為單一個物)
- 一盒巧克力有10個，弟弟拿了 $1/5$ 盒巧克力，弟弟拿了幾個巧克力？(單位分數內容物為多個個物)

單位分數、真分數的認識

- 從單位分數的認識開始
 - 單位分數是分子為1的分數
 - 如 $1/2$ 、 $1/3$ 、 $1/4$ ……
- 延伸單位分數的意義到真分數的學習
- 真分數的二層意義
 - 4等份中的3等份(部分/整體)
 - 3個四分之一合起來是四分之三
 - 以 $\frac{1}{4}$ 為單位計數
 - 3個 $\frac{1}{4}$ 合起來是 $\frac{3}{4}$

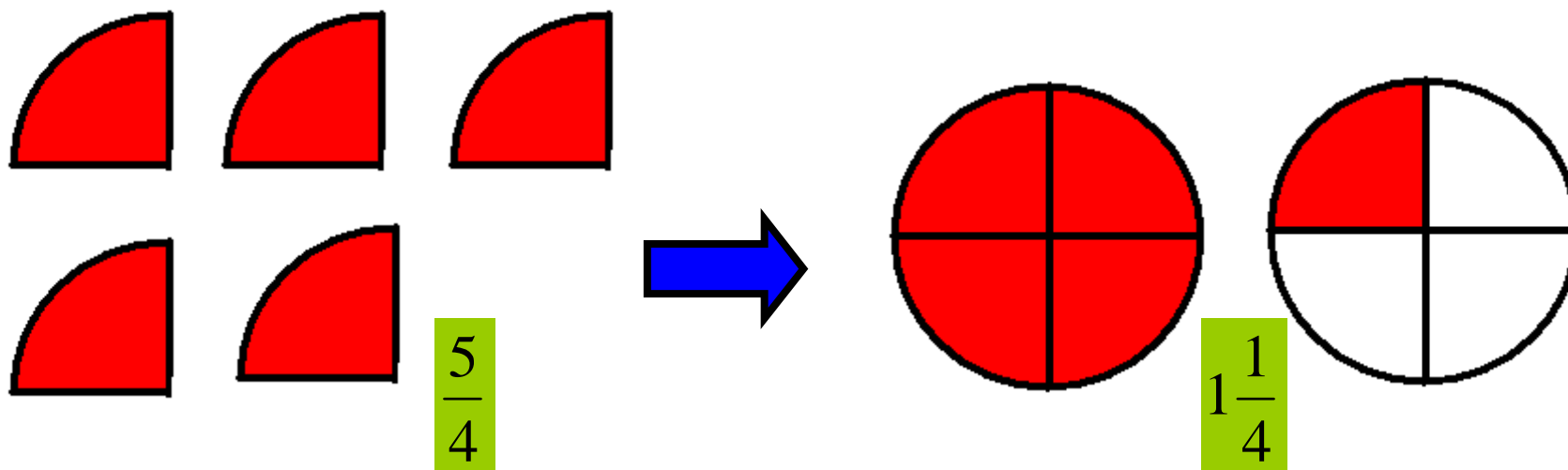


假分數和帶分數的認識

□ 延伸真分數的意義到假分數、帶分數的學習

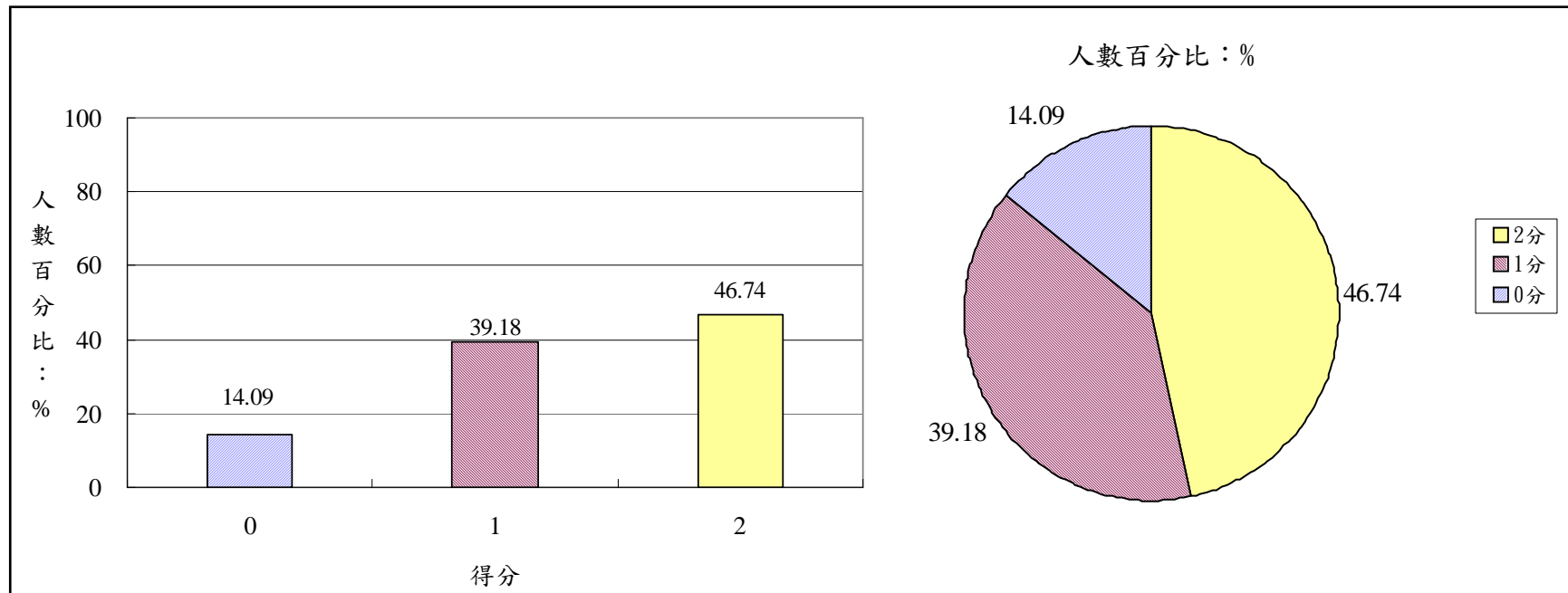
■ 例如：以為 $\frac{1}{4}$ 單位計數

■ 1個、2個、3個、4個、5個 $\frac{1}{4}$ 合起來是 $\frac{5}{4}$ ，
也就是 $1\frac{1}{4}$

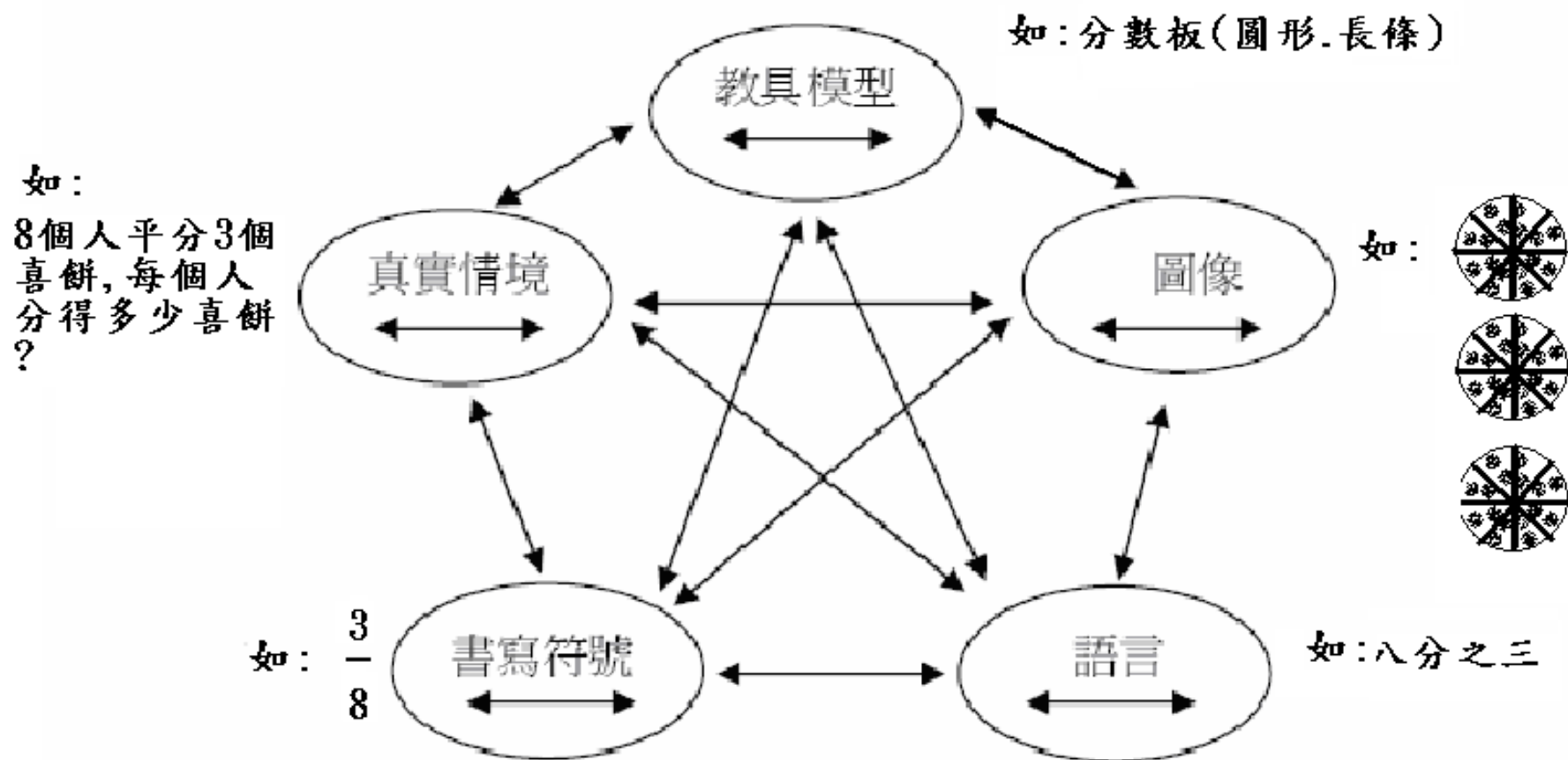


整數相除，商以分數表示~98年檢測

- 「8個人平分3個喜餅，每個人可以分到幾個喜餅？」請畫圖表示怎麼分，並寫出作法及答案。



何謂數學表徵



數學學習的五種表徵 (Lesh & Behr, 1987)

整數相除，商以分數的教學策略

□ 從具體情境引導。

情境問題 → 列式 → 畫圖表徵 → 解題

□ 給予學生表徵數學概念的練習。

□ 要釐清什麼是被分割的？等分割成幾份？

等值分數~96年檢測

□ 以「下面哪一個分數和 $\frac{20}{25}$ 一樣大？」為例

❖ 25%的學生回答「 $\frac{25}{30}$ 」

❖ 使用加法策略

等值分數的教學策略

- 多元情境呈現(連續量. 離散量)。
- 分割活動從觀察一樣大或一樣多，進而會自行分割份數(擴分)。
- 分割的方法各異，著重操作並開放解題，多元呈現。

注意:課本已經分割好了，事實上，教學引導過程是動態的，課本無法呈現，需要老師逐步引導。



從臺北市數學檢測結果探究學生
幾何的學習困難與教學策略

三角形任意兩邊和大於第三邊的性質~98年檢測

下面哪一組竹籤可以組成一個三角形？

- ① 7公分、8公分、16公分 ② 6公分、7公分、10公分
③ 5公分、5公分、10公分 ④ 5公分、9公分、14公分

(96、98年度考題)

年度	標準答案	選1的百分比	選2的百分比	選3的百分比	選4的百分比	其他*的百分比
98	2	8.09	59.15	28.25	3.54	0.98
96		7.98	56.65	29.76	4.05	1.57

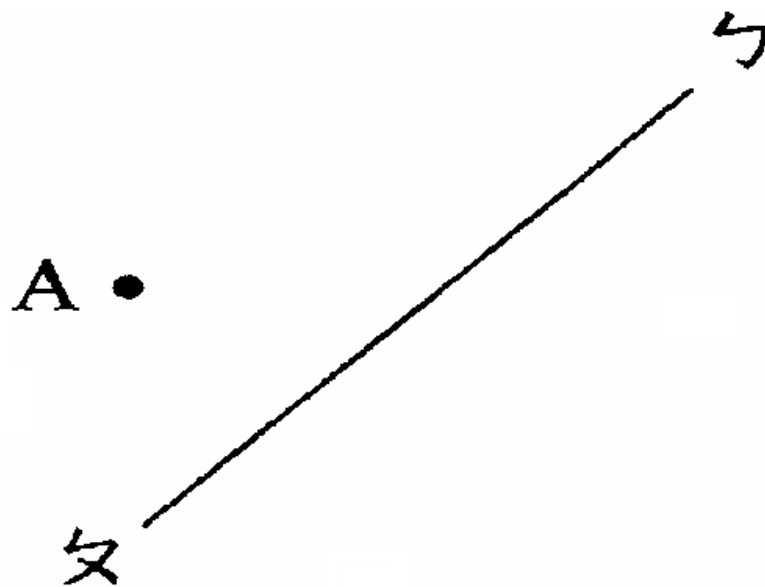
三角形任意兩邊和大於第三邊的教學策略

□ 利用扣條教學

- 討論：哪些三個邊的組合，可以拼成一個三角形嗎？為什麼？
- 討論：哪些三個邊的組合，無法拼成一個三角形嗎？為什麼？
- 討論：7公分、10公分、6公分，可以拼成一個三角形嗎？任意兩邊和大於第三邊，為何要檢查3次？只檢查1次可以嗎？

畫出對稱點~96年檢測

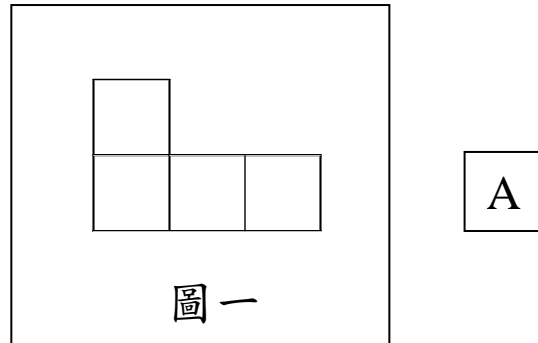
- 以下面的勺勺線為對稱軸，畫出A點的對稱點。



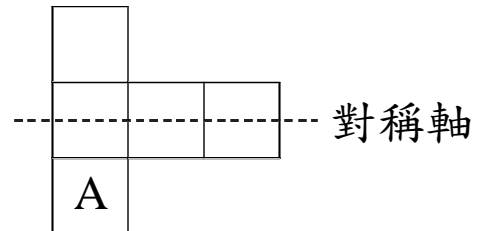
組合成線對稱圖形~98年檢測

題

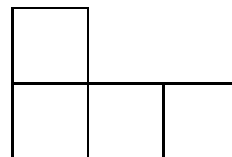
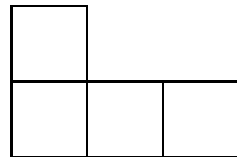
目：如何移動 **A** 和圖一組合成一個線對稱圖形？



例如：移動 **A** 後，組合成一個線對稱圖形如下圖，虛線為此線對稱圖形的對稱軸。

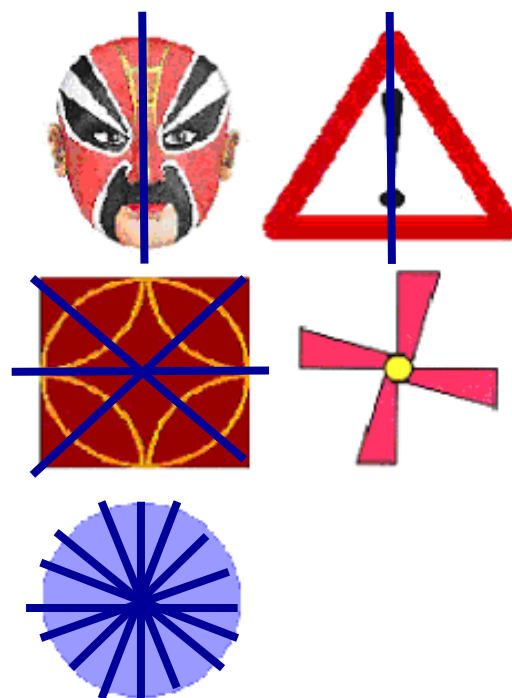
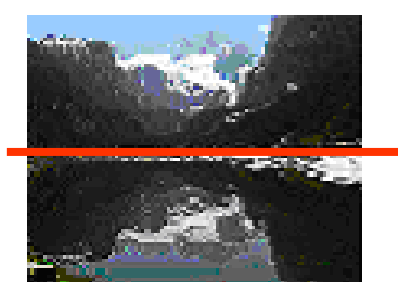
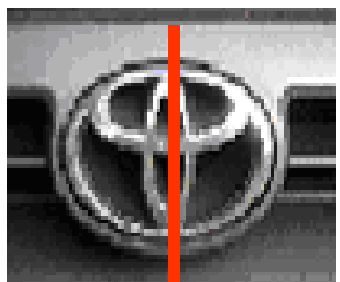
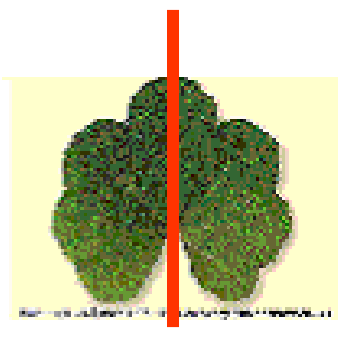
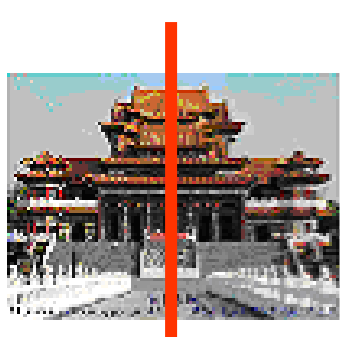


像上述例子，請你再畫出2個線對稱圖形，並分別標示出對稱軸。



線對稱的教學策略

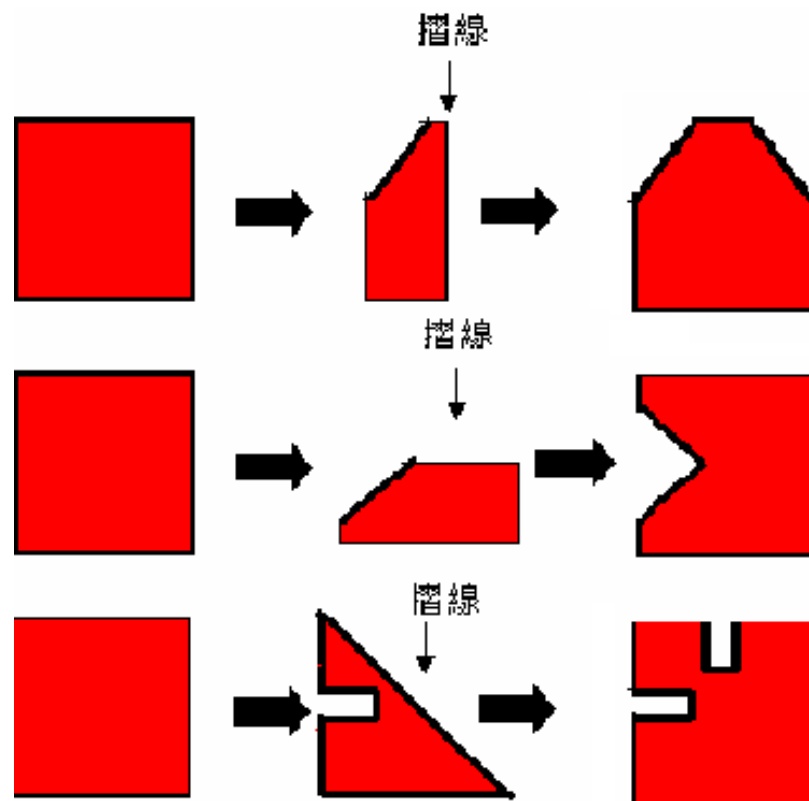
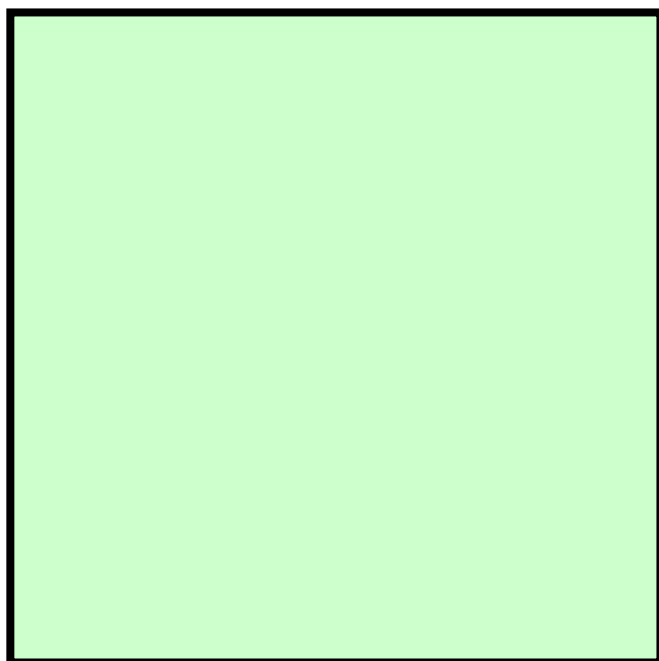
- 透過**對摺活動**認識線對稱圖形及對稱軸，並發現對稱軸不單單只是鉛直的、水平的還有**傾斜**的，甚至不是只有一條對稱軸。



圖形空間推理活動

- 透過對摺的聯想(心像)，預測圖形的另一半：圖形空間推理活動。

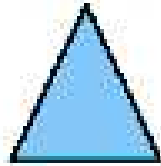
小試身手



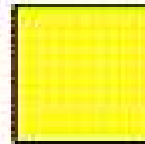
判斷各種平面圖形是否為線對稱圖形

- 判斷各種平面圖形是否為線對稱圖形，並找出其對稱軸。

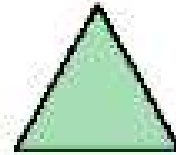
(1) 等腰三角形



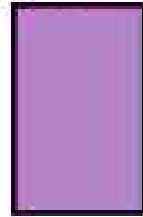
(2) 正方形



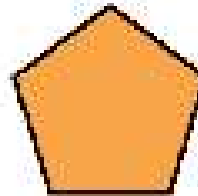
(3) 正三角形



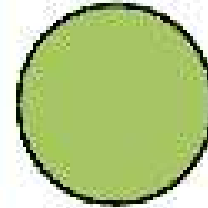
(4) 長方形



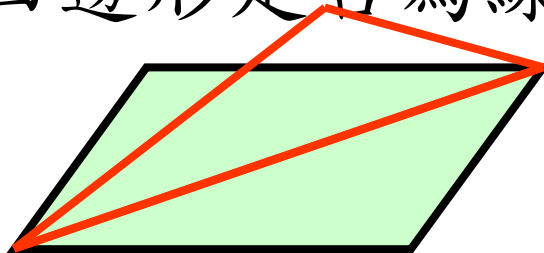
(5) 正五邊形



(6) 圓形

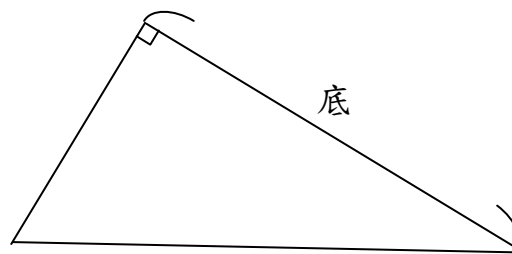
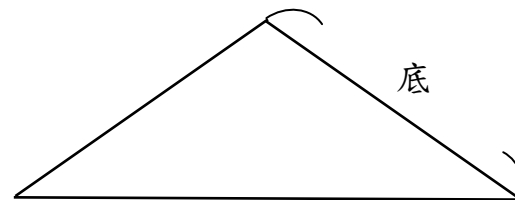
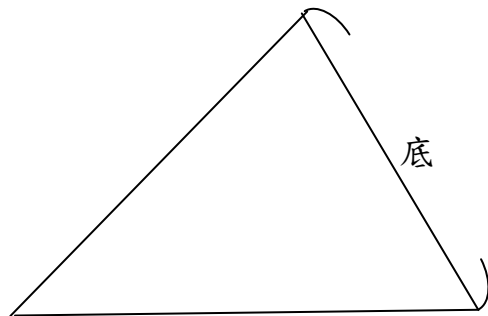


- 討論：平行四邊形是否為線對稱圖形？(迷思概念)



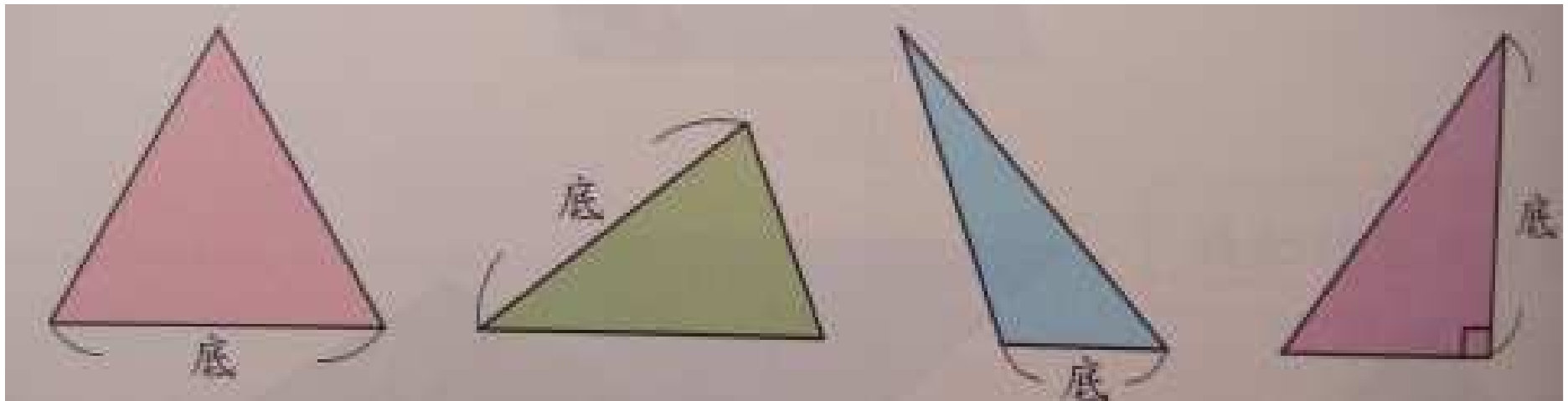
畫出三角形底邊的高~97年檢測

□ 畫出下列各三角形底邊上的高



三角形畫高

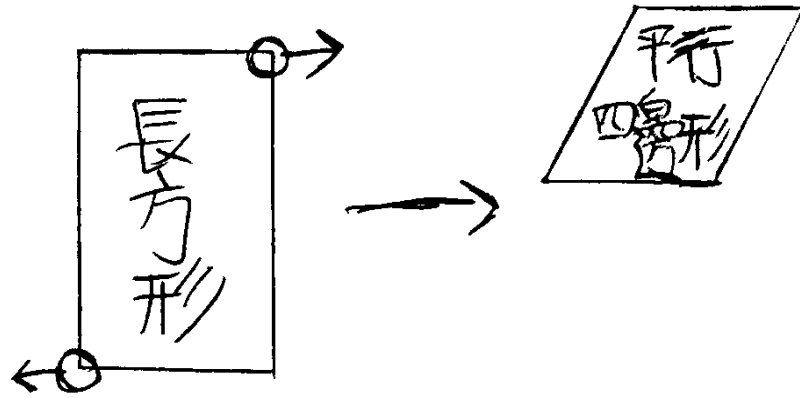
- 畫各種三角形的高。呈現各種銳角三角形、鈍角三角形和直角三角形。
- 畫三角形各個底邊的高。
- 強調三角形的高是通過頂點並垂直於底邊。



平行四邊形面積公式~97年檢測

請畫圖說明，如何利用長方形面積公式，得知「平行四邊形面積 = 底 \times 高」。

學生解題(錯誤)



因為平行四邊形和長方形一樣有兩個對邊平行，
因此只要把長方形的一個對邊同時往反方向
移動，就會變成平行四邊形。

教具的操作與教材處理的重要性

用塑膠扣條圍成一個平行四邊形，並移動塑膠扣條，觀察它移動的情形。



塑膠扣條圍成的圖形，它的邊長有沒有改變？

那它的角度有沒有改變？

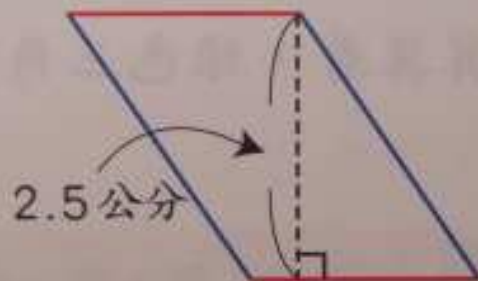
當4個角都成直角時，叫作什麼形？

當4個角都成直角時，
叫作長方形。

利用扣條圍成的平行四邊形，用來解說長方形是平行四邊形的一種。

教具的操作與教材處理的重要性

下面3個四邊形中，紅色邊都是2公分，藍色邊都是3公分。



(1) 算算看，它們的周長都相等嗎？

(2) 算算看，它們的面積都相等嗎？哪一個面積最大？

長方形推成平行四邊形時，面積會改變

平面圖形的面積~97.98年檢測

下面哪一個圖形的面積最小？

甲：長12公分，寬8公分的長方形。

乙：底12公分，高8公分的三角形。

丙：底12公分，高8公分的平行四邊形。

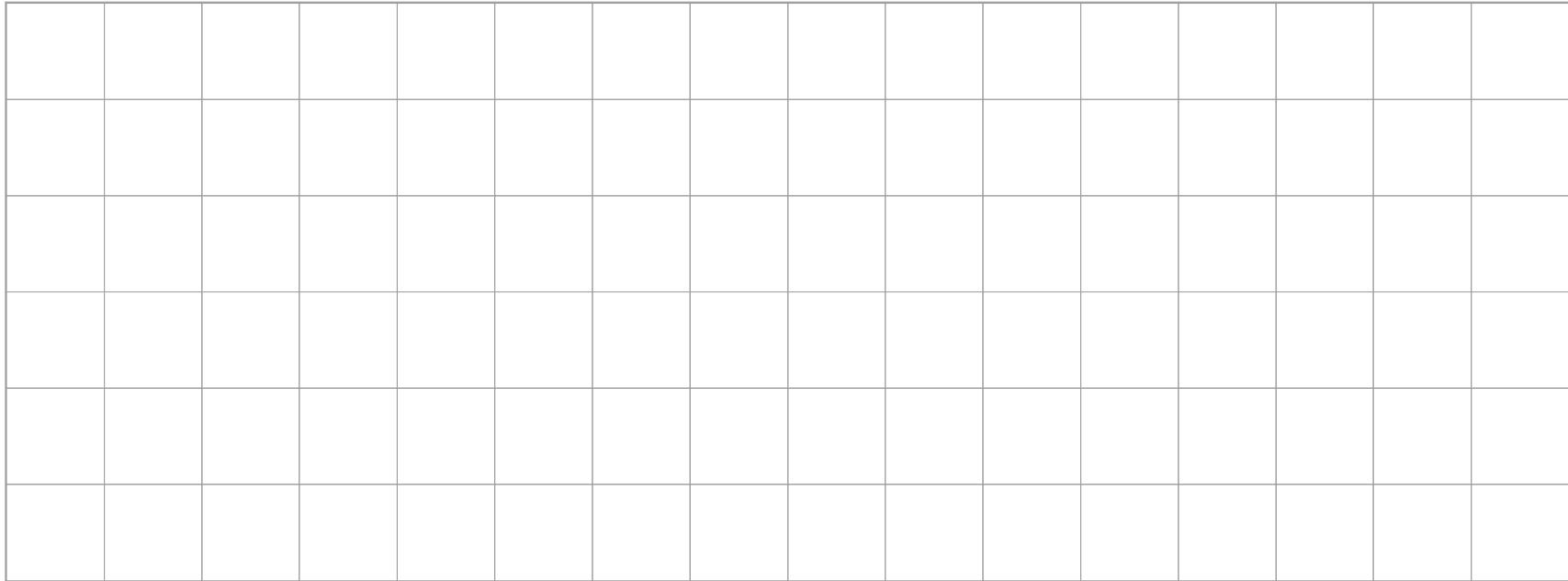
丁：邊長12公分的正方形。

① 甲 ② 乙 ③ 丙 ④ 丁 (97、98年度考題)

年度	標準答案	選1的百分比	選2的百分比	選3的百分比	選4的百分比	其他*的百分比
98	2	3.29	74.72	5.17	16.61	0.21
97		3.55	72.22	4.06	20.05	0.13

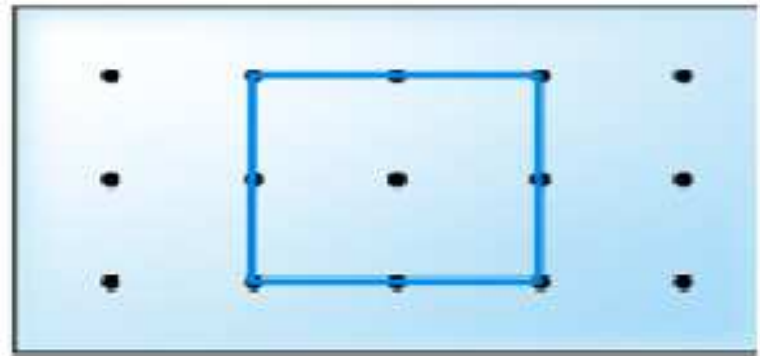
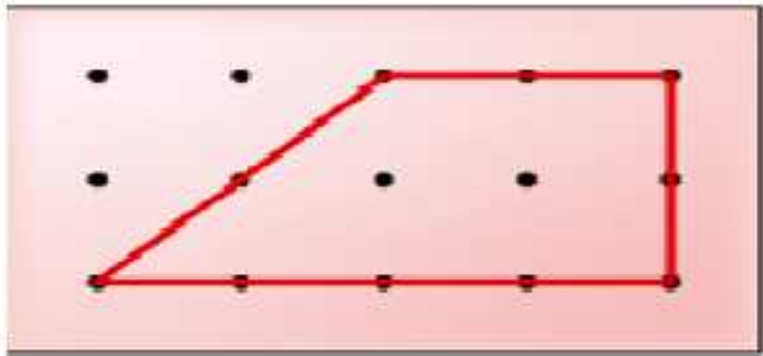
畫出面積是12平方公分的平行四邊形、三角形和梯形~97年檢測

下面每一個小方格的邊長都是1公分。請你各畫出一個面積是12平方公分的平行四邊形、三角形和梯形。

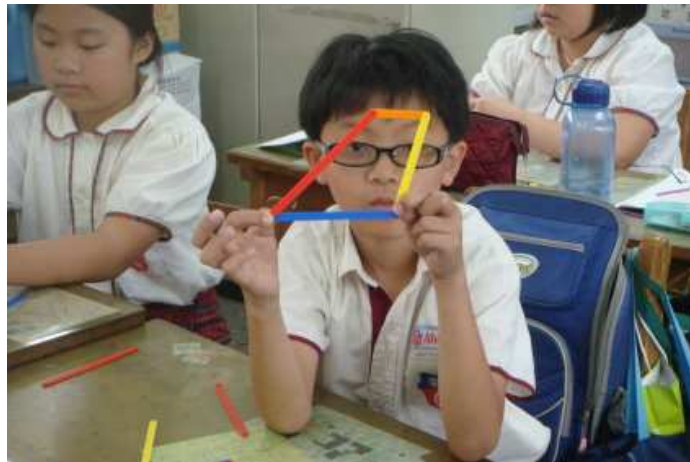


四邊形的造型活動

□釘板



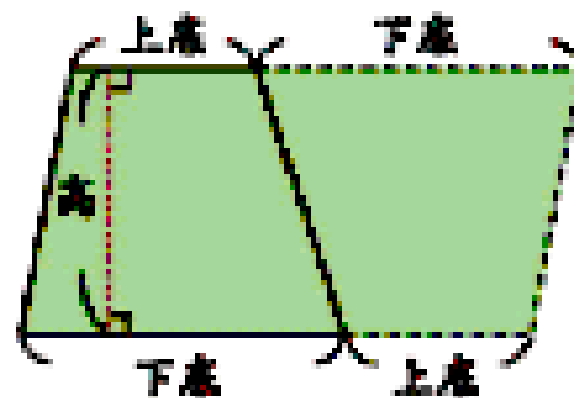
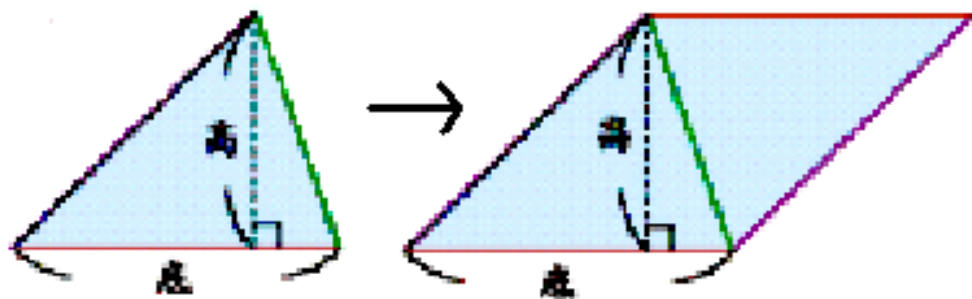
□扣條



面積公式的教學策略

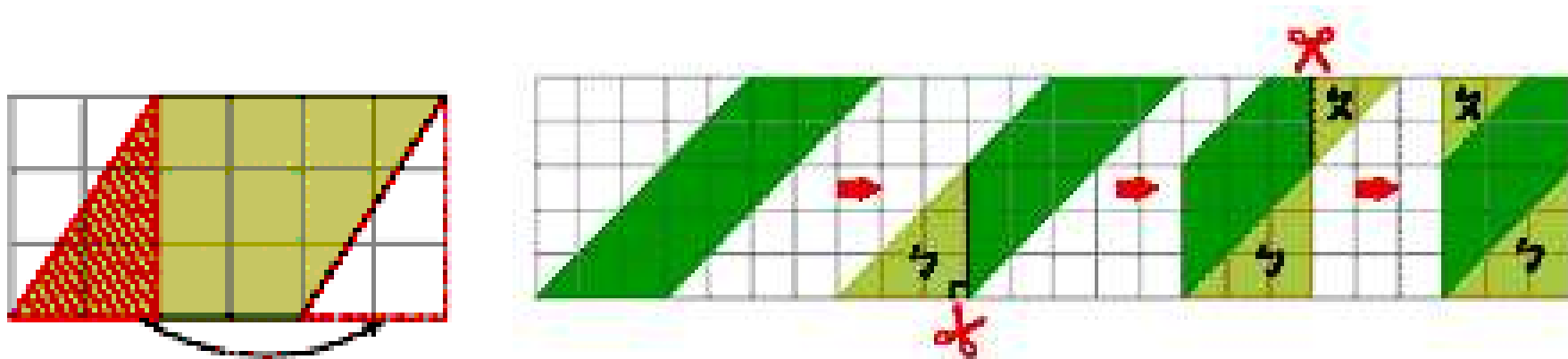
- 大多數教科書引導面積公式的教學路徑

長方形 → 平行四邊形 → 三角形
↘ 梯形



平行四邊形的面積

□ 利用長方形面積公式導出平行四邊形面積公式



透過操作(切割.重組...), 讓學生掌握公式的由來

讓學生有**逆向思考**的機會, 例如: 已知面積求算底或高。



從臺北市數學檢測結果探究學生
量與實測的學習困難與教學策略

面積和周長~96年檢測

- 在解決正方形周長和面積關係的問題（96年度）
- 約有36%的學生答錯，其中約有25%的學生直接將周長乘以4算出面積。
- 在解決長方形周長和面積關係的問題（96年度）
- 約有50%的學生不清楚長方形的周長與邊長的關係，致使無法順利解決面積問題。

長方形面積與周長的關係~ 96.98年檢測

弟弟用一根48公分長的鐵絲，圍成一個寬8公分的長方形，它的面積是多少平方公分？

- ① 24 ② 48 ③ 128 ④ 384 (96、98年度考題)

年度	標準答案	選1的百分比	選2的百分比	選3的百分比	選4的百分比	其他*的百分比
98	3	7.01	18.08	53.52	19.20	2.18
96		6.72	19.43	49.61	21.90	2.35

*「其他」包括複選及未填答者

周長的實測

□ 周長的實測與計算

- 周長 = 周界的長

- 實測與計算：

- 討論：周長在哪裡？怎麼量？如何算？

- 比出周長在哪裡？

- 用緞帶把周圍圍起來，再量

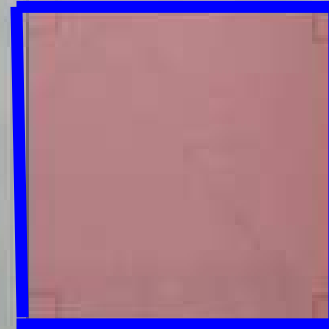
- 先量每一邊的長度，再加起來

周長公式的教學策略—使用扣條來教學

周長公式

說說看，什麼是圖形的周長？

*量量看，這張正方形色紙的周長是幾公分？



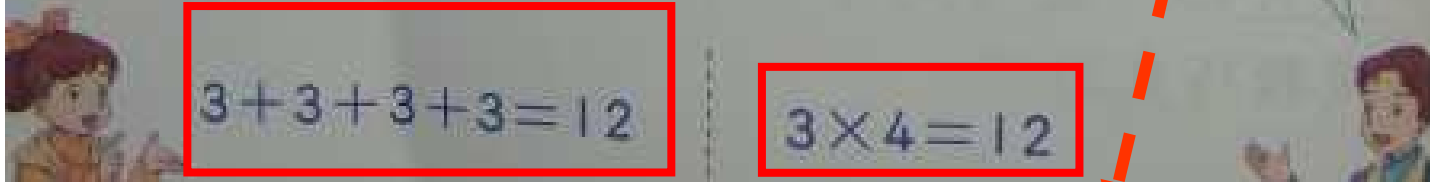
先指導
周長在
哪裡

各邊都是3公分，
我用加法來計算。

正方形的4邊都一樣長，
我用乘法來計算。

$$3 + 3 + 3 + 3 = 12$$

$$3 \times 4 = 12$$



面積初步認識和直接比較. 間接比較

□ 什麼是面?

- 溝通面(桌面的面)在哪裡?

周長和面積的
手勢大不同

□ 面的直接比較和間接比較

- 直接比較—可移動物件直接比較

- 這兩張紙張哪一張比較大(疊合)

- 間接比較:對無法移動的兩個同類量,能透過媒介量(例如數學課本),分別作直接比較,並利用比較結果,作出兩量之比較(涉及量的保留概念與量的遞移律)。

- 保留概念意指學生對於面的大小不會因物件變形. 移動而改變。

面的個別單位. 普遍單位比較

□ 面的個別單位比較

- 例如：用一樣大小的物件（色紙、名片紙…）鋪排，比較兩物件面積大小

□ 面的普遍單位比較

- 認識1平方公分——邊長為1公分的正方形面積
- 以平方公分為單位實測面積
 - 平方公分鋪排活動
 - 察覺邊長和鋪排平方公分個數的關係
 - 利用面積公式解題（內心有鋪排活動）

教學建議

- 適當調整教學型態
- 讓每位學生都能操作或自行解題
- 給予學生表達想法的機會
- 提出關鍵性問話澄清數學概念
- 教學中的評量
- 補救教學的實施

適當調整教學型態

- 讀懂孩子的心思【聯合報／洪蘭】2009.05.15
 - 發展心理學家發現，小學一、二年級的孩子注意力只有十至十五分鐘。
 - 美國聖地牙哥的未來小學（Future School）就改變了上課方式，把上課內容定為幾個核心，每個核心概念必須在十分鐘內教完，大家討論一下，再教下面一個核心概念，老師掌握孩子可以專注的十分鐘，把要教的訊息傳遞出去，結果發現這樣的學習效果很好。

適當調整教學型態(續)

- 教學方法依據孩子的注意力適當調整變換：
 - 具體操作
 - 學生上台說明
 - 老師講述
 - 運用教學媒材(資訊.繪本)

讓每位學生都能操作或自行解題

□ I see. I forgot.

□ I hear. I know.

□ I do. I understand.

給予學生表達想法的機會

□ 例子: 75元的便當，賣123個，共收入幾元？

$$\begin{array}{r} 75 \\ \times 123 \\ \hline 225 \\ 150 \\ 75 \\ \hline 9225 \end{array}$$

學生不但要會算，
還要會說明做法

75×3 3個便當的錢

75×20 20個便當的錢

75×100 100個便當的錢

總共是123個便當的錢

提出關鍵性問話澄清數學概念

- 範例2: 一瓶果汁有 $\frac{7}{9}$ 公升，每 $\frac{2}{9}$ 公升分給一個人，共可以分給幾個人？剩下幾公升？

$$\frac{7}{9} \div \frac{2}{9} = 7 \div 2 = 3 \dots 1$$

分給3個人後，剩下
1公升是否合理？

教學中的評量(給學生成功的解題經驗)

2 兒童節時，學校買了 1522 個飛盤，平分給全校 26 個班級，每個班級可分得幾個？還剩下幾個？

$$\begin{array}{r} \square \\ 26 \overline{) 1522} \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 5 \square \\ 26 \overline{) 1522} \\ \underline{130} \\ 22 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 58 \\ 26 \overline{) 1522} \\ \underline{130} \\ 222 \\ \underline{208} \\ 14 \end{array} \quad \begin{array}{r} 58 \\ 26 \overline{) 1522} \\ \underline{130} \\ 222 \\ \underline{208} \\ 14 \end{array}$$

答：58 個，剩下 14 個

用直式算算看：

① $4900 \div 70$

② $3750 \div 75$

③ $1024 \div 16$

教學中的評量：

1. 診斷老師的教學成效及學生學習成效
2. 要給予學生自行解題成功的經驗

補救教學的實施

- 從學生完成的數學習作中，分析學生錯誤類型
 - 區分課堂上統一講解和個別指導。
 - 修正下一堂課的教學。

善用網路資源

課程. 教材教法網頁：

- 國民中小學數學教師專業成長網(教學影片)
- <http://math.naer.edu.tw/>
- Math seed數學領域課程與教學輔導網(數學繪本. 教學設計. 數學步道. 教學疑難)
- <http://mathseed.ntue.edu.tw/>
- 國民教育社群網(課程綱要)
- <http://140.117.12.91/index.php>

善用網路資源

教學媒材

□ 萬用揭示板

<http://163.21.193.5/>

□ 高雄市博愛國小數學園地

http://www.paps.kh.edu.tw/aspx/math_menu/math_source.aspx

善用網路資源

數學遊戲

- National Library of Virtual Manipulatives
美國猶他州立大學研發。知名的虛擬教具網站

<http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html>

- 尤怪之家

<http://oddest.nc.hcc.edu.tw/>

- 昌爸工作坊

<http://www.mathland.idv.tw/>



感謝聆聽

期待您的回饋與指教

bet5813@yahoo.com.tw